INTÉGRALES ET PRIMITIVES

Notations : La mention du segment $[a,b]$ dans les définitions et théorèmes sous-entend que $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a < b$ (le segment contient au moins deux points)

1 PRIMITIVES

Définition 1.1 :
Soit $f : I \to \mathbb{R}$,
On dit que F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et $F' = f$

Explications :

Trouver une primitive, c'est faire l'opération inverse de celle de la dérivation. Si je dérive la primitive, je retrouve ma fonction initiale. C'est ainsi qu'il faudra se rappeler les primitives usuelles.

Attention : On a défini une primitive d'une fonction et non d'un réel. On parle donc d'une primitive de f et non de $f(x)$.

Théorème 1.2 :
Soit $f : I \to \mathbb{K}$, si f admet une primitive F sur I, alors l'ensemble des primitives de f sur I est

$$\{F + \text{cste}, \quad \text{cste} \in \mathbb{R}\}$$

Exemple

Les primitives de $x \mapsto x^3 - 5x + 2$ sont toutes les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{5}{2}x^2 + 2x + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Explications :

La primitive n'est **pas unique**.
Cela provient de ce que la dérivée fait "perdre de l'information" sur la courbe. Connaître la dérivée en tout point de la courbe ne permet pas de reconstruire la courbe. Il faut aussi avoir un point de départ.
Par exemple, si la dérivée de la fonction est $2x$, on sait que la fonction est du type x^2. Par contre, cela peut être $x \mapsto x^2 + 1$ ou $x \mapsto x^2 - 2\pi$. Ces deux fonctions ont les mêmes pentes en tout point, mais elles sont simplement décalées verticalement l'une par rapport à l'autre.
Ainsi, lorsque je cherche une primitive, j'ai à disposition toutes fonctions dont les courbes sont translatées verticalement l'une par rapport à l'autre.

Preuve :

Par double inclusion.
On note $E = \{F + \text{cste}, \quad \text{cste} \in \mathbb{R}\}$ et $\mathscr{P}$ l'ensemble des primitives de f.
$\forall \text{cste} \in \mathbb{R}$, $(F + \text{cste})' = F' = f$, donc $F + \text{cste} \in \mathscr{P}$.
Ainsi $E \subset \mathscr{P}$. Réciproquement si $G \in \mathscr{P}$, alors $G' = f = F'$, donc $(G - F)' = 0$.
Donc $G - F$ est constante sur I. Si on note cste cette constante, alors $G = F + \text{cste} \in E$.
donc $\mathscr{P} \subset E$, et par double inclusion $\mathscr{P} = E$ ■

Attention : C'est faux si I n'est pas un intervalle. Il faut alors plusieurs constantes car le décalage vertical peut différer entre deux portions de I qui ne se touchent pas.

Exemple

Donner toutes les primitives de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.
Solution :

Sur $\mathbb{R}_+^*$, les primitives de f sont de la forme $x \mapsto \ln x + c_+$ avec $c_+ \in \mathbb{R}$.
Sur $\mathbb{R}_-^*$, les primitives de f sont de la forme $x \mapsto \ln(-x) + c_-$ avec $c_- \in \mathbb{R}$.
Donc les primitives de f sur $\mathbb{R}$, sont de la forme

$$\left\{ x \mapsto \begin{cases} \ln|x| + c_+ & \text{si } x > 0 \\ \ln|x| + c_- & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad (c_+, c_-) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

2 La notation intégrale

Notation (signe intégrale)

Pour f une fonction continue sur un intervalle I, et pour $a \in I$,
on note $x \mapsto \int_a^x f = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Preuve :

L'existence de la primitive est admise à ce stade.
Unicité : on suppose qu'il existe deux primitives F et G de f qui s'annulent en a.
D'après le théorème 1.2, il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ tel que $F = G + k$.
Or $G(a) + k = F(a) = 0$ et $G(a) = 0$, donc $k = 0$ et $F = G$.
D'où l'unicité de la primitive de f qui s'annule en a. ■

Notation :

Pour $f \in \mathscr{C}^0(I)$, on note $\int f$ une primitive de f sur I.

Remarque : Cette notation sera peu utilisée car elle n'est pas très rigoureuse. En effet, il existe une infinité de primitives et l'on peut donc donner plusieurs valeurs à cette notation.

Notation (Crochet)

Pour $f \in \mathscr{C}^1([a,b])$, on note

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = [f]_a^b = f(b) - f(a)$$

Preuve :

Pour $x \in [a,b]$, $x \mapsto \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$ désigne l'unique primitive de f' qui s'annule en a.
Or f est une primitive de f'. Ainsi, d'après le théorème 1.2, il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in [a,b], \quad \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x) + k$$

or la primitive s'annule en a, donc $f(a) + k = 0$, et $k = -f(a)$.
Pour $x = b$, on a donc bien

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$$

C'est ce que l'on note $[f]_a^b$. ■

3 PRIMITIVES USUELLES

Fonction	Primitive
$x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$
$\mathrm{e}^{\lambda x}, \lambda \in \mathbb{R}^*$	$\dfrac{\mathrm{e}^{\lambda x}}{\lambda}$
$\ln(x)$	$x\ln(x)-x$

Fonction	Primitive
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\tan(x)$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$

hors programme	
Fonction	Primitive
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$
$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$

On peut justifier toutes ces primitives en les dérivant. Celle du logarithme sera obtenue un peu plus loin par intégration par parties.

Méthode (Intégration de sinus et cosinus)
Pour intégrer une fonction qui dépend des puissances de sinus et de cosinus, pensez à linéariser comme nous avons vu dans le chapitre sur les complexes et la trigonométrie.

Exemple

Calculez $\displaystyle\int_0^x \cos^2 t \sin^4 t \,\mathrm{d}t$.

Solution :

$$\begin{aligned}
\cos^2 t \sin^4 t &= \frac{1}{2^6 i^4}\left(e^{it}+e^{-it}\right)^2\left(e^{it}-e^{-it}\right)^4\\
&= \frac{1}{2^6}\left(\left(e^{it}+e^{-it}\right)\left(e^{it}-e^{-it}\right)\right)^2\left(e^{it}-e^{-it}\right)^2\\
&= \frac{1}{2^6}\left(e^{2it}-e^{-2it}\right)^2\left(e^{it}-e^{-it}\right)^2 \quad \text{id. remarquable}\\
&= \frac{1}{2^6}\left(\left(e^{2it}-e^{-2it}\right)\left(e^{it}-e^{-it}\right)\right)^2\\
&= \frac{1}{2^6}\left(e^{3it}-e^{it}-e^{-it}+e^{3it}\right)^2
\end{aligned}$$

On développe le carré et on obtient :

$$\begin{aligned}
\cos^2 t \sin^4 t &= \frac{1}{2^6}\left(2\cos(6t)-4\cos(4t)-2\cos(2t)+4\right)\\
&= \frac{1}{32}\left(\cos(6t)-2\cos(4t)-\cos(2t)+2\right)
\end{aligned}$$

On en déduit (avec la linéarité de l'intégrale)

$$\begin{aligned}
\int_0^x \cos^2(t)\sin^4(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{32}\int_0^x \cos(6t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{16}\int_0^x \cos(4t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{32}\int_0^x \cos(2t)\,\mathrm{d}t + \frac{x}{16}\\
&= \frac{\sin(6x)}{6\times 32} - \frac{\sin(4x)}{4\times 16} - \frac{\sin(2x)}{64} + \frac{x}{16}\\
&= \frac{\sin(6x)}{196} - \frac{\sin(4x)}{64} - \frac{\sin(2x)}{64} + \frac{x}{16}
\end{aligned}$$

4 Formes composées à savoir reconnaître

Fonction	Primitive
$u'u^\alpha$, pour $\alpha \neq -1$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$u'e^u$	e^u
$u'\sin u$	$-\cos u$
$u'\cos u$	$\sin u$
$\dots$	$\dots$

Exemple

Trouvez une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

Solution :

Si on pose $u : x \mapsto x^2+3$, on vérifie d'abord que u est à valeurs strictement positive sur $\mathbb{R}$ et que la fonction dont on cherche une primitive est donc continue sur $\mathbb{R}$: la fonction admet des primitives.

$u'(x) = 2x$ ce qui ressemble furieusement au numérateur. On voit donc que l'on a affaire à une fonction composée $g(u(x))$.

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\frac{1}{2}u'(x)}{\sqrt{u(x)}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}\,\mathrm{d}x \\ &= \sqrt{u(x)} = \sqrt{x^2+3}\end{aligned}$$

Cette notion de dérivée composée se généralise avec le théorème de changement de variable.

Théorème 4.1 (Le changement de variable)

Soit $f \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{K})$, a, b deux points de I et $u \in \mathscr{C}^1([a,b],I)$

$$\int_a^b u'(t)(f\circ u)(t)\,\mathrm{d}t = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,\mathrm{d}u$$

Preuve :

Pour la preuve, il suffit de voir que nous avons à faire à une **composition** de fonctions.
Pour cela, je “rends sa liberté à b” (que je vais appeler x pour plus de commodité).
Si on pose $F(x) = \int_a^x u'(t)(f \circ u)(t)\,\mathrm{d}t$ et $G(x) = \int_{u(a)}^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$
alors $F'(x) = G'(x)$ pour tout $x \in [a,b]$, donc $F - G$ est une constante. Or $(F-G)(a) = 0$ donc $F = G$ ■

Exemple (*)

Primitives de fractions rationnelles du type $\int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\alpha}$ selon le signe de α.

5 L'intégration par parties

Théorème 5.1 (Intégration par parties)

Si u et v sont deux applications $\mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{K})$, alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(x)v(x)\Big]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

Preuve :

La preuve est triviale et c'est elle qui permet de bien comprendre cette formule. Elle provient de la dérivation d'un **produit**.
$(uv)' = u'v + uv'$, donc uv est une primitive de $u'v + uv'$ qui est continue sur $[a,b]$ (car $u, v \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{K})$)
Donc $\int_a^b u'v + uv' = [uv]_a^b$,
Avec la linéarité on obtient donc la formule voulue ■

Exemple

Calculez $\int_0^x t \sin t\,\mathrm{d}t$.

Exemple

Trouvez une primitive de ln