COUPLES ET VECTEURS DE VARIABLES ALÉATOIRES

« Ainsi, non autrement tout le monde travaille pour la petite espérance. »
Charles Péguy

Notations : Dans ce chapitre, Ω représente un ensemble fini, et $\mathbf{P}$ une probabilité sur Ω.

1 Couples de variables aléatoires

A Lois conjointes et marginales

Définition 1.1 *(Loi conjointe)*

Soient $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to E'$ deux variables aléatoires.
$Z = (X, Y)$ est une nouvelle variable aléatoire de Ω dans $E \times E'$.
La loi $\mathbf{P}_Z$ du couple $Z = (X, Y)$ est appelé loi conjointe de X et Y.
On définit alors

$$\mathbf{P}\left((X, Y) = (x, y)\right) = \mathbf{P}\left(X = x \text{ et } Y = y\right).$$

Cela revient à chercher la réalisation simultanée (conjointe) de $X = x$ **et** de $Y = y$.

Exemple

On lance deux dés et on note X la valeur donnée par le premier dé et Y la valeur donnée par le second.
Si les dés sont équilibrés alors, pour tout $(x, y) \in [\![1, 6]\!]^2$,

$$\mathbf{P}\left((X, Y) = (x, y)\right) = \frac{1}{36}.$$

Exemple

On tire successivement et sans remise deux boules dans une urne qui contient 5 boules rouges et 3 bleues. On note X_1, X_2 les variables aléatoires qui valent 1 si la boule est rouge, et 0 sinon respectivement au premier et au deuxième tirage.
On peut créer le tableau des probabilités conjointes :

		$\boldsymbol{X_2}$	
		0	1
$\boldsymbol{X_1}$	0	$\frac{6}{56}$	$\frac{15}{56}$
	1	$\frac{15}{56}$	$\frac{20}{56}$

On vérifie que la somme des probabilités est égale à 1.

Exemple

On lance deux dés équilibrés et on note X le minimum et Y le maximum.

		Y					
		1	2	3	4	5	6
X	1	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
	2		$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
	3			$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
	4				$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
	5					$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$
	6						$\frac{1}{36}$

On vérifie que la somme des probabilités est égale à 1.

Dans cet exemple, on voit que l'univers image $(X,Y)(\Omega)$ n'est pas à confondre avec l'ensemble $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ dont il n'est qu'une partie. Comme $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ est plus simple à calculer, on travaillera souvent sur cet univers par abus quitte à donner la probabilité 0 aux événements « *en trop* ». Mais il faut garder en tête cette distinction. Ici, l'univers image $(X,Y)(\Omega)$ est donné par l'ensemble des couples $\{(x,y) \in [\![1,6]\!]^2,\ x \leq y\}$, qui est représenté par un triangle dans le tableau. Il est différent de l'univers $X(\Omega) \times Y(\Omega) = \{(x,y) \in [\![1,6]\!]^2\}$ représenté par le tableau entier.

Définition 1.2 *(Loi marginale)*

Soient $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to E'$ deux variables aléatoires.
La loi $\mathbf{P}_X$ de la variable X est la première loi marginale de (X,Y),
et $\mathbf{P}_Y$ est la seconde loi marginale.

Explications

La loi marginale suivant X revient à étudier la probabilité de réalisation de X quelle que soit la valeur prise par Y.
Dans le cas des probabilités discrètes on peut écrire les lois sous la forme de tableaux à deux entrées :

		Y							
		y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	y_q	Σ	
X	x_1	$p_{1,1}$	$p_{1,2}$	$\cdots$	$p_{1,j}$	$\cdots$	$p_{1,q}$	$P_X(x_1)$	
	x_2	$p_{2,1}$	$p_{2,2}$	$\cdots$	$p_{2,j}$	$\cdots$	$p_{2,q}$	$P_X(x_2)$	
	$\vdots$				$\vdots$			$\vdots$	
	x_i	$p_{i,1}$	$p_{i,2}$	$\cdots$	$p_{i,j}$	$\cdots$	$p_{i,q}$	$P_X(x_i)$	
	$\vdots$				$\vdots$			$\vdots$	
	x_p	$p_{p,1}$	$p_{p,2}$	$\cdots$	$p_{p,j}$	$\cdots$	$p_{p,q}$	$P_X(x_p)$	
	Σ	$P_Y(y_1)$	$P_Y(y_2)$	$\cdots$	$P_Y(y_j)$	$\cdots$	$P_Y(y_q)$		$\to 1$
								$\downarrow$ 1	

Pour obtenir $p_i = \mathbf{P}(X = x_i) = \mathbf{P}_X(x_i)$, on fait la somme de la ligne x_i.
Pour connaître $p'_j = \mathbf{P}(Y = y_i) = \mathbf{P}_Y(y_j)$, on somme suivant la colonne y_j.
Cela se résume par la formule suivante :

Propriété 1.3

La loi conjointe détermine les lois marginales :

$$\mathbf{P}_X(x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbf{P}\left(X = x \text{ et } Y = y\right).$$

$$\mathbf{P}_Y(y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}\left(X = x \text{ et } Y = y\right).$$

Preuve

C'est la formule des probabilités totales, simplement parce que

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_X(x) &= \mathbf{P}\left([X = x] \bigcap \left(\bigcup_{y \in Y(\Omega)} [Y = y] \right)\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\bigcup_{y \in Y(\Omega)} ([X = x] \cap [Y = y]) \right) \\
&= \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbf{P}\left([X = x] \cap [Y = y]\right) \quad \text{événements incompatibles.}
\end{aligned}$$

■

Remarque : $\left\{ \{X = x \text{ et } Y = y\},\ (x, y) \in (X, Y)(\Omega) \right\}$ forme un système complet d'événements.

Exemple

Pour le lancer de deux dés équilibrés : X traduit le résultat du premier lancer, et Y le résultat du second.

$$\mathbf{P}_X(4) = \mathbf{P}(X = 4) = \sum_{k=1}^{6} \mathbf{P}(X = 4 \cap Y = k) = 6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6}.$$

Exemple

Pour l'exemple du lancer de deux dés avec X le minimum et Y le maximum.

		Y						
		1	2	3	4	5	6	Σ
X	1	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{11}{36}$
	2		$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{9}{36}$
	3			$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{7}{36}$
	4				$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{5}{36}$
	5					$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$
	6						$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
	Σ	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	

$\rightarrow 1$

$\downarrow$

1

⚠ En général, les lois marginales ne permettent pas de définir la loi conjointe : il ne suffit pas de connaître la dernière ligne et la dernière colonne du tableau pour pouvoir le remplir tout entier !

Exemple

On tire successivement deux boules dans une urne avec R rouges et $N - R$ noires. X vaut 1 si la première boule tirée est rouge, Y vaut 1 si la seconde boule tirée est rouge, 0 sinon.

Donner la loi de Y.

Solution :

Propriété 1.4 *(Loi image d'un couple)*

Soient $X:\Omega\to E$ et $Y:\Omega\to E'$ deux variables aléatoires.
Soit $u:(X,Y)(\Omega)\to F$. La loi $\mathbf{P}_u$ est définie par

$$\mathbf{P}_u\left(u(X,Y)=t\right)=\sum_{\substack{(x,y)\in(X,Y)(\Omega)\\ u(x,y)=t}}\mathbf{P}\left(X=x \text{ et } Y=y\right).$$

On remarque que $\mathbf{P}$ est une probabilité sur $(X,Y)(\Omega)$ (fini) si elle est à valeurs positive et si

$$\sum_{(x,y)\in(X,Y)(\Omega)}\mathbf{P}(X=x,Y=y)=1.$$

Exemple *(À retenir)*

Soit le tirage de deux dés. X est la variable aléatoire correspondant au résultat du premier dé, et Y au résultat du second.
La loi de la somme est donnée pour $u(X,Y)=X+Y$.

$$\mathbf{P}(X+Y=k)=\sum_{i=1}^{k-1}\mathbf{P}\big([X=i]\cap[Y=k-i]\big).$$

B Espérance

Théorème 1.5 *(Théorème de transfert)*

Soient X et Y deux variables aléatoires finies sur Ω, et u une application définie sur $(X,Y)(\Omega)$ dans $\mathbf{R}$.

$$\mathbf{E}\left(u(X,Y)\right)=\sum_{(x,y)\in(X,Y)(\Omega)}u(x,y)\mathbf{P}(X=x,Y=y).$$

Preuve

Admis ■

Exemple

Calculer l'espérance de la somme de deux variables aléatoires X et Y en utilisant le théorème de transfert.
Solution :

C Covariance

Définition 1.6 *(Covariance)*

Soient X et Y deux variables aléatoires finies sur Ω, on définit la covariance de X,Y par

$$\mathbf{Cov}\left(X,Y\right)=\mathbf{E}\Big[\left(X-\mathbf{E}(X)\right)\left(Y-\mathbf{E}(Y)\right)\Big].$$

Si on prend $Y=X$, on retrouve la formule de la variance de X : $\mathbf{Cov}(X,X)=\mathbf{V}(X)$.
Comme pour la variance, on utilisera plutôt la formule de Kœnig-Huygens pour calculer la covariance.

Propriété 1.7 *(Formule de Kœnig-Huygens)*

$$\mathbf{Cov}(X,Y)=\mathbf{E}(XY)-\mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y).$$

Propriété 1.8

Pour X, Y, X_1 et X_2 des variables aléatoires sur Ω, et $(a,b)\in\mathbf{R}^2$,

1. $\mathbf{Cov}(X,Y)=\mathbf{Cov}(Y,X)$. (symétrie)
2. $\mathbf{Cov}(aX+b,Y)=a\,\mathbf{Cov}(X,Y)$.
3. $\mathbf{Cov}(aX_1+X_2,Y)=a\,\mathbf{Cov}(X_1,Y)+\mathbf{Cov}(X_2,Y)$. (linéarité)
4. $\mathbf{Cov}(X,X)=\mathbf{V}(X)\geq 0$. (positive)

Propriété 1.9 *(Variance d'une somme)*

Soient X et Y deux variables aléatoires finies sur Ω,

$$\mathbf{V}(X+Y)=\mathbf{V}(X)+\mathbf{V}(Y)+2\,\mathbf{Cov}(X,Y).$$

Preuve

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X+Y)&=\mathbf{E}\left((X+Y)^2\right)-\mathbf{E}\left(X+Y\right)^2\\&=\mathbf{E}\left(X^2+Y^2+2XY\right)-\left(\mathbf{E}\left(X\right)+\mathbf{E}\left(Y\right)\right)^2\\&=\mathbf{E}\left(X^2\right)+\mathbf{E}\left(Y^2\right)+2\mathbf{E}\left(XY\right)-\mathbf{E}\left(X\right)^2-\mathbf{E}\left(Y\right)^2-2\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)\\&=\mathbf{V}(X)+\mathbf{V}(Y)+2\mathbf{Cov}(X,Y).\end{aligned}$$

■

2 Indépendance des variables aléatoires

A Loi conditionnelle

Définition 2.1 *(Loi conditionnelle)*

Pour (X, Y) deux variables aléatoires finies sur (Ω), et on définit la loi conditionnelle de X sachant $(Y = y)$ par

$$f_{X|Y=y} \; : \begin{cases} X(\Omega) & \to [0,1] \\ x & \mapsto \mathbf{P}_{[Y=y]}(X=x) = \mathbf{P}\left(X = x | Y = y\right) = \dfrac{\mathbf{P}\left(X=x, Y=y\right)}{\mathbf{P}(Y=y)}. \end{cases}$$

On parle aussi de probabilité conditionnelle de X sachant $[Y = y]$.

Remarque : Cette définition suppose que $\mathbf{P}(Y = y) \neq 0$.

Travailler sur une loi conditionnelle ne modifie pas les variables aléatoires, mais seulement la loi de probabilité. Cela illustre que les mêmes variables aléatoires peuvent être étudiées avec des lois de probabilités différentes.

Lorsque nous ne connaissons que les lois marginales, nous ne pouvons pas retrouver la loi conjointe. Par contre, si nous connaissons à la fois les lois marginales et les lois conditionnelles par rapport à une variable, alors il est possible de reconstruire la loi conjointe. En effet

$$\mathbf{P}\left((X,Y) = (x,y)\right) = \mathbf{P}\left([X = x] \cap [Y = y]\right) = \mathbf{P}_{[Y=y]}\left(X = x\right)\mathbf{P}\left(Y = y\right)$$

Exemple

Pour le lancer de deux dés, on peut considérer la probabilité que le plus grand dé soit y sachant que le plus petit est x. Si les dés sont équilibrés, on obtient la loi de probabilité conditionnelle.
Par exemple pour $x = 2$:

Y	1	2	3	4	5	6
$\mathbf{P}_{[X=2]}(Y = y)$	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$

Cette probabilité conditionnelle se construit facilement à partir du tableau des probabilités conjointes et marginales. Il suffit de sélectionner la bonne ligne $X = 2$ et de diviser chaque probabilité conjointe par la probabilité marginale (somme des probabilités conjointes de la ligne).

B Variables aléatoires indépendantes

Définition 2.2 *(Variables aléatoires indépendantes)*

Deux variables aléatoires X et Y définies sur Ω sont dites **indépendantes**, si

$$\forall (x,y) \in (X,Y)(\Omega), \quad \mathbf{P}\left([X = x] \cap [Y = y]\right) = \mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y).$$

Propriété 2.3

Si les événements $[X = x]$ et $[Y = y]$ sont tous de probabilité non nulle pour $(x, y) \in (X, Y)(\Omega)$, alors, on a les caractérisations équivalentes :

$$\forall (x,y) \in (X,Y)(\Omega), \quad \mathbf{P}_{[Y=y]}\left(X = x\right) = \mathbf{P}(X = x).$$

ou

$$\forall (x,y) \in (X,Y)(\Omega), \quad \mathbf{P}_{[X=x]}\left(Y = y\right) = \mathbf{P}(Y = y).$$

Explications

Il est sous-entendu que les variables sont indépendantes pour la probabilité $\mathbf{P}$. L'indépendance dépend du choix de probabilité même si ce n'est pas dit explicitement.

Exemple

Si X et Y désignent respectivement le minimum et le maximum lors du lancer de deux dés équilibrés, alors ces variables aléatoires ne sont pas indépendantes. Par exemple $\mathbf{P}(X = 6, Y = 5) = 0$, mais $\mathbf{P}(X = 6)\mathbf{P}(Y = 5) = \frac{1}{36}\frac{9}{39} \neq 0$.

Exemple

Si X et Y désignent respectivement la valeur du premier dé et la valeur du second dé lors du lancé de deux dés équilibrés, alors ces variables aléatoires sont indépendantes.

Propriété 2.4 *(Loi de Bernoulli indépendantes)*

Deux lois de Bernoulli X_1 et X_2 sont indépendantes si et seulement si les événements $[X_1 = 1]$ et $[X_2 = 1]$ sont indépendants.

Preuve

Si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B aussi, A et $\overline{B}$ aussi et $\overline{A}$ et $\overline{B}$ aussi (en exercice).
Dans le cas des lois de Bernoulli, comme l'univers image se réduit à $[X = 1]$ et $[X = 0] = \overline{[X = 1]}$, la vérification proposée est donc suffisante. ■

Théorème 2.5

Soient deux variables aléatoires **indépendantes** X et Y définies sur Ω,

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}\Big((X, Y)(\Omega)\Big), \quad \mathbf{P}(X \in A\,,\ Y \in B) = \mathbf{P}(X \in A)\mathbf{P}(Y \in B).$$

Preuve

On écrit A et B comme union d'événements élémentaires. ■

Remarque : Il existe aussi une réciproque :
Si pour *toutes* parties (A, B) de $(X, Y)(\Omega)$, on a $\mathbf{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbf{P}(X \in A)\mathbf{P}(Y \in B)$.
alors les variables aléatoires sont indépendantes pour $\mathbf{P}$.

Théorème 2.6 *(L'indépendance passe à l'image)*

Soient deux variables aléatoires indépendantes $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to E'$.
Pour toutes les applications $f : E \to F$ et $g : E' \to F'$,

$$f(X) \text{ et } g(Y) \text{ sont indépendantes.}$$

Explications

Supposons que l'on associe un gain à chacune des variables aléatoires (selon la valeur qu'elles prennent), si les variables sont indépendantes, alors les gains le sont aussi.

Preuve

Admis ■

Exemple

Si X et Y sont indépendantes, alors X^2 est indépendante avec Y.

Théorème 2.7 *(Espérance du produit)*

Si deux variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** pour $\mathbf{P}$, *alors*

$$\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y).$$

⚠ La réciproque est **fausse**, il ne suffit pas d'avoir $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$ pour que les variables aléatoires soient indépendantes. C'est une erreur fréquente.

Preuve

On note $X(\Omega) = \{x_i\}_{i \in [\![1,p]\!]}$ et $Y(\Omega) = \{y_j\}_{j \in [\![1,q]\!]}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(XY) &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} x_i y_j \mathbf{P}\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} x_i y_j P\left(X = x_i\right) P\left(Y = y_j\right) \quad \text{(Variables indépendantes).} \\
&= \sum_{i=1}^{p} x_i \mathbf{P}\left(X = x_i\right) \sum_{j=1}^{q} y_j \mathbf{P}\left(Y = y_j\right) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)
\end{aligned}$$

■

En particulier, deux variables aléatoires indépendantes ont une covariance nulle. Par contre, ce n'est pas parce que la covariance est nulle que les variables sont indépendantes.

Propriété 2.8

Si X, Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$.

Preuve

Découle de la formule de Kœnig-Huygens. ■

Cela permet de réinterpréter la covariance comme une mesure de corrélation entre X et Y.

Propriété 2.9 *(Égalité de Bienaymé)*

Si X, Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors

$$\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y).$$

Preuve

Car la covariance est nulle. ■

Exemple

Cette égalité permet de retrouver la variance d'une variable suivant une loi binomiale très simplement.
En effet, tout variable aléatoire qui suit une loi binomiale, peut être interprétée comme la somme de n variables indépendantes et de même loi de Bernoulli.

3 Généralisation à n variables aléatoires

A Indépendance mutuelle

Définition 3.1 *(Variables mutuellement indépendantes)*

Soient $X_1, X_2, \cdots, X_n$ des variables sur un même univers Ω.
$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ sont **mutuellement indépendantes** si

$$\forall (x_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)(\Omega), \qquad \mathbf{P}\left(\bigcap_{i\in I} X_i = x_i\right) = \prod_{i\in I} \mathbf{P}\left(X_i = x_i\right)$$

Propriété 3.2 *(Indépendance des sous-familles)*

Si $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ sont des variables mutuellement indépendantes, alors toute sous-famille l'est aussi.

Propriété 3.3 *(Lien avec l'indépendance des événements)*

Soient n variables aléatoires mutuellement indépendantes $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$,
Pour $(A_1, A_2, \cdots, A_n) \in (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n)(\Omega)$, les événements $(X_i \in A_i)$ sont mutuellement indépendants.

Preuve

Admis. ∎

Théorème 3.4 *(L'indépendance passe à l'image)*

Si $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ sont des variables mutuellement indépendantes,

1. alors $(u_1(X_1), u_2(X_2), \cdots, u_n(X_n))$ sont aussi mutuellement indépendantes.
2. alors $u(X_1, X_2, \cdots, X_p)$ et $v(X_{p+1}, \cdots, X_n)$ sont aussi indépendantes.

Exemple

Si X, Y, Z sont indépendantes, alors $X + Y$ et Z sont indépendantes.

Propriété 3.5 *(Variance d'une somme)*

Si $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ sont n variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors

$$\mathbf{E}(X_1\, X_2 \cdots X_n) = \mathbf{E}(X_1)\, \mathbf{E}(X_2) \cdots \mathbf{E}(X_n).$$

$$\mathbf{V}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \mathbf{V}(X_1) + \mathbf{V}(X_2) + \cdots + \mathbf{V}(X_n).$$

Preuve

Par récurrence. ∎

B Application aux lois de Bernoulli et binomiale

Propriété 3.6 *(Somme de lois de Bernoulli)*

Soient $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes sur Ω,
Soit $p \in [0, 1]$,
Si $\forall i \in [\![1, n]\!], X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$$

Lemme 3.7 *(Rappel : Formule de Vandermonde)*

Soient $n, m, k \in N^*$, avec $k \leq n + m$.

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}.$$

Cette formule n'est pas explicitement au programme, mais peut intervenir facilement dans des exercices : il faut donc savoir la redémontrer.

Preuve

L'idée (comme souvent pour ce genre de relations) est de repasser aux polynômes.

$$\begin{aligned}
& (1+X)^{m+n} = (1+X)^n (1+X)^m \\
\iff & \sum_{k=0}^{m+n} \binom{n}{k} X^k = \sum_{i=0}^{m} \binom{n}{i} X^i \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} X^j \\
\iff & \sum_{k=0}^{m+n} \binom{n}{k} X^k = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \binom{n}{i}\binom{m}{j} X^{j+i}
\end{aligned}$$

On identifie le coefficient de X^k dans les deux expressions :
Dans la deuxième expression, pour $i \geq 0$ fixé, $j = k - i \geq 0$. Donc i varie dans $[\![0, k]\!]$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$$

∎

Propriété 3.8 *(Stabilité de la loi binomiale)*

Soient X, Y deux variables aléatoires **indépendantes** sur Ω,
Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$ avec le **même paramètre** p,
alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n + m, p)$.

Preuve

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X+Y=k) &= \sum_{i=0}^{k} \mathbf{P}(X=i \cap Y=k-i) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \mathbf{P}(X=i)P(Y=k-i) \quad \text{variables indépendantes} \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \binom{m}{k-i} p^{k-i}(1-p)^{m-k+i} \\ &= \binom{n+m}{k} p^k (1-p)^{n+m-k} \quad \text{Formule de Vandermonde}\end{aligned}$$

■

Exemple

Un institut de recherche effectue des tests sur le comportement des souris dans un labyrinthe. Deux chercheurs se partagent la tâche : sur les 300 essais, l'un en effectue 100, et le second 200.
Le labyrinthe comporte un embranchement, et les souris ont la probabilité p d'aller à gauche et la probabilité $1-p$ d'aller à droite. Les épreuves sont indépendantes les unes des autres.
On compte pour chaque chercheur le nombre de souris qui sont allées à droite. On note ce nombre X_1 pour le premier chercheur et X_2 pour le second.
Alors $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(100, p)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(200, p)$.
On comprend bien que si on met ensemble les deux expériences, alors
$X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(300, p)$.

Corollaire 3.9

Soient $(X_i)_{i\in[\![1,m]\!]}$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes sur Ω,
Soit $p \in [0,1]$ et $(n_1, n_2, \cdots, n_m) \in \mathbf{N}^m$,
Si $\forall i \in [\![1,m]\!], X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n_i, p)$, alors

$$\sum_{i=1}^{m} X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2 + \cdots + n_m, p).$$

C Loi faible des grands nombres

Ce dernier résultat est hors programme.

Théorème 3.10 *(Loi faible des grands nombres (⋆))*

Si $(X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots)$ est une suite de variables aléatoires

1. mutuellement indépendantes,
2. de même loi $\mathbf{P}_X$.

Alors pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - E(X)\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Explications

Ce résultat permet de justifier que, quelque soit notre exigence de précision, lorsque l'on répète un grand nombre de fois une même expérience aléatoire, de façon indépendante, et que l'on calcule la moyenne, on est presque sûr d'obtenir l'espérance (à l'incertitude près fixée au préalable et arbitrairement petite).

Preuve

On note $Y_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$. Alors $\mathbf{E}(Y_n) = \mathbf{E}(X)$ par linéarité de l'espérance.
Or

$$\mathbf{V}(Y_n) = \frac{1}{n^2}\mathbf{V}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \frac{\mathbf{V}(X_1) + \mathbf{V}(X_2) + \cdots + \mathbf{V}(X_n)}{n^2} = \frac{\mathbf{V}(X)}{n}.$$

Donc d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \mathbf{E}(X)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbf{V}(X)}{n\varepsilon^2}.$$

Donc pour $n \to +\infty$, on obtient la limite voulue. ■

Exemple

Donner un contre-exemple à la loi faible des grands nombres lorsque les variables ne sont pas supposées mutuellement indépendantes.
Solution :