ANALYSE ASYMPTOTIQUE

Notation : $DL_k(x)$ désigne le développement limité à l'ordre k en x

EXERCICE 1 (*)
Déterminer les développements limités suivants :

1) $DL_3(0)$ de $\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)$

2) $DL_3(0)$ de $\ln(1+\sin x)$

3) $DL_3(1)$ de $\cos(\ln(x))$

EXERCICE 2 (**)
Donner le développement à l'ordre 5 en 0 de arcsin par les deux méthodes suivantes

1) $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2) $\sin(\arcsin x) = x$ pour $x \in [-1;1]$

EXERCICE 3 (*)
Déterminer les développements limités suivants :

1) $DL_3(0)$ de $\dfrac{\ln(1+x)}{e^x-1}$

2) $DL_2(0)$ de $\dfrac{\arctan x}{\tan x}$

3) $DL_2(1)$ de $\dfrac{x-1}{\ln x}$

EXERCICE 4 (**) (Équivalent simple)
Donner une équivalent simple en 0 de

$$(1+\sin x)^x - (1+x)^{\sin x}$$

EXERCICE 5 (**)
Déterminer les développements limités suivants :

1) $DL_{10}(0)$ de $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$
Indication[1]

2) $DL_3(2\pi)$ de $\sin\sqrt{x^2-3\pi^2}$
Indication[2]

EXERCICE 6
Soit $f :]-1,0[\cup]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est alors dérivable en 0.
Quelle est alors la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente en ce point ?

EXERCICE 7
Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x}{e^x-1}$$

peut être prolongée en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 8 (**) (Étude locale d'une réciproque)
Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = xe^{x^2}$ admet une application réciproque définie sur $\mathbb{R}$ et former le $DL_5(0)$ de f^{-1}.

EXERCICE 9 (**) Soit f la fonction définie par

$$f(x) = (1+x)e^{\frac{1}{x}}$$

Étudier les branches infinies de f et donner la position des asymptotes par rapport à la courbe.

EXERCICE 10 (**) Soit f la fonction définie par

$$f(x) = x^2\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

Donner l'asymptote de f en $+\infty$ et donner sa position par rapport à la courbe.

EXERCICE 11 (**) Soient a un réel non nul et f la fonction définie au voisinage de 0 par

$$f(x) = \frac{\ln(1+ax)}{1+x}$$

Déterminer les éventuelles valeurs de a pour lesquelles f présente un point d'inflexion en 0.
Un point d'inflexion est un changement de sens de courbure de la courbe.

[1] Intégrez un développement limité.
[2] Faites le développement limité pour $t = x - 2\pi$.