Sommes et produits

On admettra les deux résultats suivants :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

1 Sommes

Exercice 1 (*) (Pour commencer)
Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $a \in \mathbf{C}$, calculer les sommes :

1. $\sum_{k=1}^{n} 3^n$
2. $\sum_{k=n}^{2n} a$
3. $\sum_{k=0}^{n} 3(a^k + 1)$
4. $\sum_{k=0}^{n} 3a^{k+1}$
5. $\sum_{k=-n}^{0} k$
6. $\sum_{k=-n}^{n} (2k+1)$
7. $\sum_{k=-5}^{-10} a$
8. $\sum_{k=1}^{n} k(k+2)$

Exercice 2 (*)
Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $a \in \mathbf{C}$, calculer les sommes :

1. $\sum_{k=0}^{10} 5$
2. $\sum_{k=-2}^{7} (-1)$
3. $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ak}$
4. $\sum_{k=1}^{n} a^{2k+1}$
5. $\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2$
6. $\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k$
7. $\sum_{k=-n}^{2n} n^k$

Exercice 3 (**) (changement d'indice)
Remplacer le ? par sa valeur dans les égalités suivantes :

1. $\sum_{k=1}^{n} (k+1)a_k = \sum_{j=?}^{?} ja_?$
2. $\sum_{k=2}^{n+3} a_{k-1} = \sum_{j=?}^{?} a_j$
3. $\sum_{k=1}^{n+1} a_{n-k} = \sum_{j=?}^{?} a_j$
4. $\sum_{k=1}^{n} a_{2k} + \sum_{k=1}^{n} a_{2k+1} = \sum_{k=?}^{?} a_k$

Exercice 4 (**)
Pour $n \in \mathbf{N}^*$, calculer :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right)$

Exercice 5 (**)
Soit $a \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} ka^k$

1. Calculer S_n lorsque $a = 1$.
2. Lorsque $a \neq 1$, calculer $aS_n - S_n$, en déduire la valeur de S_n.

Exercice 6 (**)
Soit p un nombre entier, $p \geq 2$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{p^k} \leq \frac{p}{1-p}$$

2 Sommes doubles

Exercice 7 (*)
Pour $n \in \mathbf{N}^*$, calculer les sommes :

1. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{n} i$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} 2^{i+j}$
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \frac{i}{j}$
4. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{n} (2i+j)$
5. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{n} (2^i+j)$
6. $\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} ij$

Exercice 8 (**)
Pour $n \in \mathbf{N}^*$, calculer les sommes :

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \max(i,j)$
2. $\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} |i-j|$

Exercice 9 (***)

1. Montrer que $\forall x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$
2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ un famille de $\mathbf{R}_+^*$.
Montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \geq n^2$$

Exercice 10 (***)
Pour $n \geq 1$, calculer

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{i}{i+j}$$

3 Produits

Exercice 11 (*)
Calculer les produits suivants

1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+3}$
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1-\frac{1}{k}\right)$
3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a^k$
4. $\displaystyle\prod_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{2n} (-1)^k(n-k)$

Indication[1]

Exercice 12 (*)
Simplifier en utilisant la notation factorielle

1. $6\times5\times4\times3$
2. $\dfrac{10\times9\times8}{7\times6\times5\times4}$
3. $n(n-1)(2n+2)$

Exercice 13 (**)
Simplifier en utilisant la notation factorielle

1. $(2n)\times(2n-2)\times(2n-4)\times\cdots\times2$
2. $(2n-1)\times(2n-3)\times(2n-5)\times\cdots\times1$

Exercice 14 (***)
On définit la suite (u_n) par $(u_0,u_1)\in\mathbf{R}^2$ et

$$\forall n\in\mathbf{N},\ u_{n+2}=-2(n+1)u_n$$

Exprimer simplement u_n en fonction de n et sans utiliser le signe $\prod$.
Indication[2]

4 Coefficients binomiaux

Exercice 15 (*)
Calculer les expressions suivantes

1. $\binom{10}{9}$
2. $\binom{8}{2}$
3. $\binom{21}{21}$
4. $\binom{50}{48}$

Exercice 16 (*)
Pour $(x,y)\in\mathbf{C}^2$, développer *rapidement* à l'aide du triangle de Pascal

1. $(1+x)^5$
2. $(1-x)^6$
3. $(x-y)^4$

Exercice 17 (*)
Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{3^k}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{n-k}}{3^{k+1}}$

1. Faire un changement d'indice dans la deuxième partie du produit.
2. Distinguer les cas où n est pair et où n est impair.

Exercice 18 (**)
Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{1+k}k^2\binom{n}{k}$

Exercice 19 (**)
Calculer la somme

$$\sum_{1\le i,j\le n}\binom{j}{i}$$

Exercice 20 (**)
Calculer la double somme

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{n-i}{n-j}\binom{n}{i}$$

Exercice 21 (***) (Classique)
Pour tout $(n,p)\in\mathbf{N}^2$, montrer que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}$$

Indication[3]

Exercice 22 (***)
Pour tout $n\in\mathbf{N}$, on pose

$$u_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k}$$

En utilisant le triangle de Pascal, exprimer u_{n+2} en fonction de u_n et u_{n+1}.
En déduire une expression simple de u_n en fonction de n.

Exercice 23 (***)
Pour $n\in\mathbf{N}$, calculer les sommes :

1. $\displaystyle S_1=\sum_{0\le 2k\le n}\binom{n}{2k}$ et $\displaystyle S_2=\sum_{0\le 2k+1\le n}\binom{n}{2k+1}$
2. $\displaystyle T_1=\sum_{0\le 2k\le n}(-1)^k\binom{n}{2k}$

   et $\displaystyle T_2=\sum_{0\le 2k+1\le n}(-1)^k\binom{n}{2k+1}$

3. On pourra utiliser une récurrence.