

APPLICATIONS

1 POUR COMMENCER

Exercice 1 (*)

Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité des applications suivantes :

$$1. f_1 : \begin{cases} \mathbf{Z} & \rightarrow \mathbf{Z} \\ n & \mapsto -n \end{cases}$$

$$2. f_2 : \begin{cases} \mathbf{R} & \rightarrow [0, 1] \\ x & \mapsto |\sin x| \end{cases}$$

$$3. f_3 : \begin{cases} \mathbf{N} & \rightarrow \mathbf{N} \\ n & \mapsto 2n \end{cases}$$

$$4. f_4 : \begin{cases} \mathbf{N} & \rightarrow \{-1, 1\} \\ n & \mapsto (-1)^n \end{cases}$$

$$5. f_5 : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \rightarrow \mathbf{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto (x, x + y, x - y) \end{cases}$$

$$6. f_6 : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \rightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (2x + 3y, x + 2y) \end{cases}$$

Lorsque les applications sont bijectives, déterminer leur réciproque.

2 LECTURE GRAPHIQUE

Exercice 2 (*)

Déterminer graphiquement

$$\sin\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right), \tan\left(\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]\right), \text{ et } \cos\left(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]\right).$$

Exercice 3 (*)

Déterminer graphiquement

- $\exp^{-1}([0, 1])$,
- $\exp^{-1}(]0, 1])$,
- $\exp^{-1}(]1, +\infty[)$,
- $\exp(\exp^{-1}([-1, 1]))$.

Exercice 4 (*)

Représenter graphiquement les fonctions suivantes sur leur domaine de définition.

$$a : x \mapsto \begin{cases} 2 - x & \text{si } x \geq 3 \\ x^2 & \text{si } x < 3 \end{cases} .$$

$$b : x \mapsto \begin{cases} 1 + 1/x & \text{si } x > 0 \\ \sqrt{-x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases} .$$

Répondre aux questions suivantes en lisant sur les graphes des fonctions concernées :

- Donner $a(]-\infty, 0])$, $a([0, +\infty[)$.
- Donner $b(]0, 2])$, $b([1, +\infty[)$.

- $a : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est-elle surjective ? injective ?

Déterminer deux intervalles I et J de \mathbf{R} tels que $a : I \rightarrow J$ soit bijective.

- $b : \mathbf{R} \rightarrow [0, +\infty[$ est-elle surjective ? injective ?

Déterminer deux intervalles $I \subset \mathbf{R}$ et $J \subset [0, +\infty[$ tels que $b : I \rightarrow J$ soit bijective.

3 IMAGES DIRECTES ET RÉCIPROQUES

Exercice 5 (**)

$$f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x - 2}.$$

- Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_f de f .
- Déterminer l'image de f , c'est-à-dire $f(\mathcal{D}_f)$.
- L'application f est-elle injective de \mathcal{D}_f dans \mathbf{R} ?

Exercice 6 (**)

Soit $f : x \mapsto \sqrt{|x - 1|}$.

- Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_f de f .
- Déterminer l'image de f , c'est-à-dire $f(\mathcal{D}_f)$.
- L'application f est-elle injective de \mathcal{D}_f dans \mathbf{R} ?

Exercice 7 (**)

Soit la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + 1}{2x - 1}.$$

- Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_f de f .
- Déterminer $\text{Im}(f) = f(\mathcal{D}_f)$.
- L'application f est-elle injective de \mathcal{D}_f dans \mathbf{R} ?
Est-elle surjective entre ces mêmes ensembles ?

4 BIJECTIVITÉ

Exercice 8 (*) (Bijection continue)

Soit I une partie de \mathbf{R} , $a \leq b$ sont deux points de I .

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$, on suppose que $f(a) \leq f(b)$.

Montrer à l'aide de contre-exemples que les hypothèses du théorème de la bijection continue sont *minimales* (on ne peut pas en supprimer).

Exercice 9 (*)

Soient

$$f : \begin{cases} \mathbf{R} & \rightarrow \mathbf{R} \\ x & \mapsto \sqrt{x^2 + 1} - x \end{cases} \quad \text{et} \quad g : \begin{cases} \mathbf{R}^* & \rightarrow \mathbf{R} \\ x & \mapsto \frac{1 - x^2}{2x} \end{cases}.$$

- Montrer que pour tout réel x , $f(x) > 0$.
- Montrer que la composée $f \circ g$ est bien définie sur \mathbf{R}^* et calculer $(f \circ g)(x)$ pour tout x non nul.
Même question pour $g \circ f$.
- Que peut-on en conclure ? (on pourra utiliser la première question)

Exercice 10 (*)

On considère l'application

$$h : x \mapsto \frac{2x+1}{x+2}.$$

- Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_h de h .
- Déterminer $\text{Im}(h) = h(\mathcal{D}_h)$ et montrer que h est bijective de \mathcal{D}_h dans $\text{Im}(h)$.

Donner son application réciproque.

Exercice 11 ()**

Pour chaque fonction,

- indiquer le domaine de définition,
- étudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité dans \mathbf{R} .

- $x \mapsto x e^{x^2}$.
- $x \mapsto x \sin x$.
- $x \mapsto e^{\sin x}$.
- $x \mapsto x \lfloor x \rfloor$.

Exercice 12 ()**

Pour $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$ avec $c \neq 0$, on définit

$$f : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}.$$

- Donner le domaine de définition \mathcal{D}_f de f .
- À quelle(s) condition(s) nécessaires et suffisantes sur (a, b, c, d) , l'application est-elle bijective de son domaine de définition sur son image.

Dans ce cas, exprimer son image et l'application réciproque.

5 INCONTOURNABLES**Exercice 13 (**) (applications circulaires réciproques)**

- Montrer que la restriction de \cos à $[0, \pi]$ admet une application réciproque arccos définie sur $[-1, 1]$ à valeurs dans $[0, \pi]$. Donner son domaine de dérivabilité et calculer sa dérivée.
 - Montrer de même, l'existence de $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donner son domaine de dérivabilité et calculer sa dérivée.
 - Montrer de même, l'existence de $\arctan : \mathbf{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donner son domaine de dérivabilité et calculer sa dérivée.
- Montrer que

$$\forall x \in [-1, 1], \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

- Chercher une expression semblable pour

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{pour } x \neq 0.$$

Exercice 14 ()**

Montrer que la fonction

$$\text{sh} : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

réalise une bijection de \mathbf{R} dans un intervalle J à préciser, et donner son application réciproque.

Exercice 15 (*)**

Montrer que la fonction

$$\text{sh} : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

induit une bijection de \mathbf{R}_+ dans un intervalle J à préciser, et donner son application réciproque.

6 EXERCICES ABSTRAITS**Exercice 16 (*)**

Soient E et F deux ensembles non vides et f une injection de E dans F .

Montrer que f induit une injection de E dans $f(E)$.

Exercice 17 ()**

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

- Si $g \circ f$ est injective,
 - montrer que f est injective,
 - montrer à l'aide d'un contre-exemple que g n'est pas nécessairement injective.
- Si $g \circ f$ est surjective,
 - montrer que g est surjective,
 - montrer à l'aide d'un contre-exemple que f n'est pas nécessairement surjective.

Exercice 18 (*)**

Soient E et F deux ensembles non vides. Montrer l'équivalence entre les deux assertions :

- Il existe une injection de E dans F .
- Il existe une surjection de F sur E .

Exercice 19 (*)**

Soit $f : E \rightarrow F$, montrer que

- $A \subset f^{-1}(f(A))$ pour toute partie A de E .
- $f(f^{-1}(B)) \subset B$ pour toute partie B de F .
- f injective $\Rightarrow A = f^{-1}(f(A))$ pour toute partie A de E .
- f surjective $\Rightarrow B = f(f^{-1}(B))$ pour toute partie B de F .