

# FONCTIONS USUELLES

Toutes les études de fonction se font **sans calculatrice**.

## 1 ÉTUDES QUALITATIVES DE FONCTIONS

### Exercice 1 (\*) (Courbes)

Tracer les fonctions suivantes (sans calculatrice et avec le minimum de calculs) les fonctions suivantes :

1.  $x \mapsto \ln(x-1) + 2$
2.  $x \mapsto e^{|x|}$
3.  $x \mapsto \frac{3x-2}{x-1}$
4.  $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$

### Exercice 2 (\*) (Symétries)

Les fonctions suivantes sont-elles paires ? impaires ? périodiques ? de quelle période ? symétriques par rapport à un point ? à un axe ?

1.  $x \mapsto \ln(|x|)$
2.  $x \mapsto \frac{1+e^x}{1-e^x}$
3.  $x \mapsto \sin(x^2)$
4.  $x \mapsto \sin\left(\frac{x+1}{2}\right)$
5.  $x \mapsto -xe^{x^2-3}$
6.  $x \mapsto e^{(x-3)^2+1}$
7.  $x \mapsto -\ln|(x+1)(x+2)|$
8.  $x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+4}$

### Exercice 3 (\*\*)

Soient  $f, g$  deux fonctions définies sur  $\mathbf{R}$ , croissantes.

1. Montrer que  $f + g$  est croissante.
2. Si  $f$  et  $g$  sont positives, que peut-on dire de la monotonie de  $f \times g$  ?
3. Si  $f$  et  $g$  sont négatives, que peut-on dire de la monotonie de  $f \times g$  ?
4. Dans le cas général, que peut-on dire de la monotonie de  $f \times g$  ?

## 2 COMPOSITION

### Exercice 4 (\*)

On considère les applications

$$f : x \mapsto x^2 + 1 \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \ln x.$$

Déterminer les domaines de définition et les expressions de  $f \circ g$  et  $g \circ f$ .

### Exercice 5 (\*)

On considère les applications

$$f : x \mapsto \frac{2x+1}{x-2} \quad \text{et} \quad g : x \mapsto x^2$$

1. Donner les ensembles de définition de  $f$  et  $g$ .
2. Déterminer  $f \circ g$  et  $g \circ f$ .
3. Calculer l'image de  $3x$  par  $f$  et l'image de  $x^3$  par  $g$ .

## 3 DÉRIVÉES

### Exercice 6 (\*)

Déterminer les domaines de définition et calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1.  $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$
2.  $x \mapsto e^{(x^2)}$
3.  $x \mapsto e^{2x+1}$
4.  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$
5.  $x \mapsto \ln|x|$
6.  $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$

### Exercice 7 (\*\*)

Déterminer les domaines de définition et calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1.  $x \mapsto \ln|x^2 - 3x + 2|$
2.  $x \mapsto \sqrt{\tan x}$
3.  $x \mapsto \ln^2(x+1)$
4.  $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$

### Exercice 8 (\*\*)

Déterminer les domaines de définition et calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1.  $x \mapsto \sin^3(x)$
2.  $x \mapsto \sqrt{\ln(x^2 - x + 1)}$
3.  $x \mapsto \sqrt{\ln|x^2 - x - 1|}$

## 4 LIMITES ET BRANCHES ASYMPTOTIQUES

### Exercice 9

Étudier les branches asymptotiques en  $+\infty$  :

1.  $x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x + 4}$ .
2.  $x \mapsto \sqrt{x^3 - 2x^2 + 4}$ .
3.  $x \mapsto \sqrt{x+4} - \sqrt{x}$ .
4.  $x \mapsto \sqrt{x+4} - \sqrt{x-2}$ .
5.  $x \mapsto \sqrt{2x+4} - \sqrt{x-2}$ .
6.  $x \mapsto \sqrt{x^2+4} - \sqrt{x}$ .
7.  $x \mapsto \frac{\ln(x^2+1)}{x}$ .
8.  $x \mapsto \ln(x^2+1)$ .
9.  $x \mapsto e^{x^2+1} - e^{x^2}$ .
10.  $x \mapsto \frac{e^x}{\ln(x)}$ .

11.  $x \mapsto \ln(e^{2x} - e^x)$ . (en  $+\infty$  et en  $0$ ).

## 5 ÉTUDES COMPLÈTES

### Exercice 10 (\*) (baccalauréat 1962)

Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction

$$f : x \mapsto 2(1 - \cos x) \sin^2(x).$$

### Exercice 11 (\*\*)

Étude complète de la fonction

$$x \mapsto \frac{\ln x}{x}.$$

### Exercice 12 (\*\*)

Études complètes des fonctions de l'exercice 7.

**Exercice 13 (\*\*)**

Étude complète de la fonction

$$x \mapsto \ln |x^3 + 3x^2 + 3x + 2|.$$

**Exercice 14 (\*\*) (baccalauréat 1962)**

Étude complète de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + 2x - 5}{x^2 - 2x + 2}.$$

En déduire le nombre d'extrémités d'arcs<sup>1</sup>  $u$  solutions de

$$(E) : (1 - m) \sin^2 u - 2(m + 1) \cos u + 3m + 4 = 0.$$

On posera  $\cos u = x$  et l'on discutera suivant les valeurs du paramètre  $m$ .**6 APPROFONDISSEMENT****Exercice 15 (\*\*)**

On définit les fonctions

$$f : x \mapsto (2x - 1)^2 \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \sup_{x \leq t \leq x+1} f(t).$$

Étudier  $g$ .**Exercice 16 (\*\*\*)**

1. Discuter, suivant la valeur de  $a \in \mathbf{R}$  du nombre de solutions de l'équation

$$(E_a) \quad x^a = \ln(x).$$

2. Tracer dans un même repère la courbe représentative de  $x \mapsto \ln x$  et celle de la fonction  $x \mapsto x^{a_0}$  où  $a_0$  est l'unique réel strictement positif tel que l'ensemble des solutions de  $E_{a_0}$  soit un singleton.

---

1. Le nombre de  $u \in [0, \pi]$  qui sont solution de l'équation.