

# FONCTIONS USUELLES

Toutes les études de fonction se font **sans calculatrice**.

## 1 ÉTUDES QUALITATIVES DE FONCTIONS

### Exercice 1 (\*) (Courbes)

Tracer les fonctions suivantes (sans calculatrice et avec le minimum de calculs) les fonctions suivantes :

1.  $x \mapsto \ln(x-1) + 2$
2.  $x \mapsto e^{|x|}$
3.  $x \mapsto \frac{3x-2}{x-1}$
4.  $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$

### Exercice 2 (\*) (Symétries)

Les fonctions suivantes sont-elles paires ? impaires ? périodiques ? de quelle période ? symétriques par rapport à un point ? à un axe ?

1.  $x \mapsto \ln(|x|)$
2.  $x \mapsto \frac{1+e^x}{1-e^x}$
3.  $x \mapsto \sin(x^2)$
4.  $x \mapsto \sin\left(\frac{x+1}{2}\right)$
5.  $x \mapsto -xe^{x^2-3}$
6.  $x \mapsto e^{(x-3)^2+1}$
7.  $x \mapsto -\ln|(x+1)(x+2)|$
8.  $x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+4}$

### Exercice 3 (\*\*)

Soient  $f, g$  deux fonctions définies sur  $\mathbf{R}$ , croissantes.

1. Montrer que  $f + g$  est croissante.
2. Si  $f$  et  $g$  sont positives, que peut-on dire de la monotonie de  $f \times g$  ?
3. Si  $f$  et  $g$  sont négatives, que peut-on dire de la monotonie de  $f \times g$  ?
4. Dans le cas général, que peut-on dire de la monotonie de  $f \times g$  ?

### Exercice 4 (\*\*)

Pour chaque fonction,

- indiquer le domaine de définition,
- étudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité dans  $\mathbf{R}$ .

1.  $x \mapsto xe^{x^2}$
2.  $x \mapsto x \sin x$
3.  $x \mapsto e^{\sin x}$
4.  $x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
5.  $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
6.  $x \mapsto x \lfloor x \rfloor$

## 2 ÉQUATIONS

### Exercice 5 (\*\*)

1. (a) Montrer que  $\cos$  admet une application réciproque  $\arccos$  définie sur  $[-1, 1]$  à valeurs dans  $[0, \pi]$ . Donner son domaine de dérivabilité et calculer sa dérivée.
- (b) Montrer de même, l'existence de  $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , donner son domaine de dérivabilité et calculer sa dérivée.
- (c) Montrer de même, l'existence de  $\arctan : \mathbf{R} \rightarrow ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , donner son domaine de dérivabilité et calculer sa dérivée.
2. Montrer que

$$\forall x \in [-1, 1], \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

3. Chercher une expression semblable pour

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} \quad \text{pour } x \neq 0$$

### Exercice 6 (\*\*\*)

1. Discuter, suivant la valeur de  $a \in \mathbf{R}$  du nombre de solutions de l'équation

$$(E_a) \quad x^a = \ln x$$

2. Tracer dans un même repère la courbe représentative de  $x \mapsto \ln x$  et celle de la fonction  $x \mapsto x^{a_0}$  où  $a_0$  est l'unique réel strictement positif tel que l'ensemble des solutions de  $E_{a_0}$  soit un singleton.

## 3 DÉRIVÉES DE FONCTIONS COMPOSÉES

### Exercice 7 (\*)

Déterminer les domaines de définition et calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1.  $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$
2.  $x \mapsto e^{(x^2)}$
3.  $x \mapsto e^{2x+1}$
4.  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$
5.  $x \mapsto \ln|x|$
6.  $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$

### Exercice 8 (\*\*)

Déterminer les domaines de définition et calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1.  $x \mapsto \ln|x^2 - 3x + 2|$
2.  $x \mapsto \sqrt{\tan x}$
3.  $x \mapsto \ln^2(x+1)$
4.  $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$

**Exercice 9 (\*\*)**

Déterminer les domaines de définition et calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1.  $x \mapsto \sin^3(x)$
2.  $x \mapsto \sqrt{\ln(x^2 - x + 1)}$
3.  $x \mapsto \sqrt{\ln|x^2 - x - 1|}$

**4 ÉTUDES COMPLÈTES****Exercice 10 (\*) (baccalauréat 1962)**

Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction

$$f : x \mapsto 2(1 - \cos x) \sin^2(x)$$

**Exercice 11 (\*\*)**

Étude complète de la fonction

$$x \mapsto \frac{\ln x}{x}$$

**Exercice 12 (\*\*)**

Études complètes des fonctions de l'exercice 8.

**Exercice 13 (\*\*)**

Étude complète de la fonction

$$x \mapsto \ln|x^3 + 3x^2 + 3x + 2|$$

**Exercice 14 (\*\*) (baccalauréat 1962)**

Étude complète de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + 2x - 5}{x^2 - 2x + 2}$$

En déduire le nombre d'extrémités d'arcs<sup>1</sup> u solutions de

$$(E) : (1 - m) \sin^2 u - 2(m + 1) \cos u + 3m + 4 = 0$$

On posera  $\cos u = x$  et l'on discutera suivant les valeurs du paramètre  $m$ .

**Exercice 15 (\*\*)**

On définit les fonctions

$$f : x \mapsto (2x - 1)^2 \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \sup_{x \leq t \leq x+1} f(t)$$

Étudier  $g$ .

**Exercice 16 (\*\*\*)**

1. Étudier l'application  $\text{sh} : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .
2. Montrer que l'application est bijective de  $\mathbf{R}$  sur  $\mathbf{R}$  et donner l'expression de sa réciproque.

**Exercice 17 (\*\*\*)**

1. Étudier l'application  $\text{ch} : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ .
2. Montrer que l'application est bijective de  $[0, +\infty[$  sur un intervalle à déterminer et donner l'expression de sa réciproque.

1. Le nombre de  $u \in [0, \pi]$  qui sont solution de l'équation.