Ensembles

Exercice 1 (*)
Montrer que $\{x > 0,\ \forall y > 0, x < y\} = \emptyset$.

Exercice 2 (*)
Lister les ensembles

1. $\left\{x^2,\ x \in \{-1, 0, 1\}\right\}$
2. $\left\{(x, y) \in [\![1, 3]\!]^2\right\}$
3. $\{(x, y) \in [\![1, 3]\!] \times [\![-1, 1]\!]\}$
4. $\{(x, y) \in [\![1, 3]\!] \times \{-1\ ,\ 1\}\}$
5. $[\![1, 3]\!]^2$
6. $\{-1, 0\}^3$

Exercice 3 (**)
Déterminer les solutions réelles et les représenter graphiquement (sur la droite ou dans le plan).

1. $x = \sqrt{x^2}$
2. $\sqrt{x} < 0$
3. $(x + 1)^2 < x$
4. $y \geq x \Rightarrow y^2 \geq x^2$
5. $e^{x+1} = e^x + 1$
6. $x^2 < 2^2$
7. $-x^2 < -2$

Exercice 4 (*)

1. Donner un exemple d'une intersection d'ensembles non vides, qui est vide.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'union de deux ensembles soit vide.

Exercice 5 (**)
Décrire en extension les ensembles $\mathcal{P}(\{x\})$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{x\}))$.

Exercice 6 (***)

1. Soient deux ensembles A et B, écrire $A - B = A \setminus B = \{x \in A, x \notin B\}$ à partir des opérations ensemblistes usuelles.
2. Donner une représentation graphique de $A - B$.
3. Prouver que $A - B = A \iff B - A = B$

Exercice 7
Soit un ensemble E, on définit une relation de division sur les parties de E par $A \text{ div } B = A \cup \overline{B}$.
Calculer :

1. $A \text{ div } (B \cap A)$
2. $A \text{ div } (B \cup A)$
3. $A \cup (B \text{ div } A)$
4. $A \cap (B \text{ div } A)$

Exercice 8 (**)
Soient A et B deux parties de E, on définit la différence symétrique de A et B par

$$A \,\Delta\, B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$$

en notant $\bar{B} = \complement_E B$ et $\bar{A} = \complement_E A$

1. Expliquer ce que représente la différence symétrique.
2. Donner $E \,\Delta\, \emptyset$, $A \,\Delta\, E$, $E \,\Delta\, E$
3. Montrer que $A \,\Delta\, B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$

Exercice 9 (***)

1. Pour tout $n \in \mathbf{N} \backslash \{0; 1\}$, on considère l'intervalle de $\mathbf{R}$, $\quad I_n = \left[\frac{1}{n}; 1 - \frac{1}{n}\right]$.
   Déterminer une expression plus simple de l'ensemble
   $$J = \bigcup_{n \in \mathbf{N} \backslash \{0;1\}} I_n$$
2. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on considère l'intervalle de $\mathbf{R}$, $\widetilde{I_n} = \left]1 - \frac{1}{n}; 1 + \frac{1}{n}\right[$.
   Déterminer une expression plus simple de l'ensemble
   $$K = \bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} \widetilde{I_n}$$

Exercice 10 (***)
Soit f une application définie sur E et A et B deux parties de E. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ? Justifier.

1. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
2. $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$
3. $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$
4. $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$

Exercice 11 (**)
Pour tout $m \in \mathbf{R}$, on définit la droite $\mathcal{D}_m$ par l'équation

$$\mathcal{D}_m\ :\ 12mx - 9y = 3m + 6$$

Montrer que toutes les droites $\mathcal{D}_m$ sont concourantes en un unique point.

Exercice 12 (**)
On définit les ensembles

$$K = [2, 5] \times [-1, 4] \quad \text{et} \quad D = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ y \leq x\right\}$$

1. Représenter dans le plan
   (a) le domaine correspondant aux points $M(x, y)$ pour $(x, y) \in K$.
   (b) le domaine correspondant aux points $M(x, y)$ pour $(x, y) \in D$.
2. L'implication suivante est-elle vraie ?
   $$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad (x, y) \in K \Rightarrow (x + 1, y - 1) \in D$$
3. La réciproque est-elle vraie ?
4. Montrer que $K \cap D \neq \emptyset$

Exercice 13 (***)
A et B sont deux ensembles non vides de E.
Montrer que

$$\left(\forall X \subset E,\ \forall Y \subset E, \begin{cases} A \cap X = A \cap Y \\ B \cap X = B \cap Y \end{cases} \Rightarrow X = Y\right)$$

$\iff A \cup B = E$