Espaces vectoriels

1 Espaces vectoriels

Exercice 1 (*)
Dire à chaque fois s'il s'agit d'un espace vectoriel, puis le démontrer.
Lorsque les opérations ne sont pas précisées, il s'agit de l'addition et de la multiplication externe usuelles.

1. L'ensemble des suites réelles qui convergent vers 0.
2. L'ensemble des suites réelles divergentes.
3. L'ensemble des suites réelles qui s'annulent une infinité de fois,
4. L'ensemble des applications de E dans $\mathbf{R}$,
5. L'ensemble des applications bornées de E dans $\mathbf{R}$,
6. Le plan complexe $\mathbf{C}$.
7. $\left\{(x, y) \in \mathbf{R}_+^2, \text{ tel que } x = y\right\}$
8. $\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2, \text{ tel que } 2x - 5y - 1 = 0\right\}$
9. $\{(x, 2x, 3x)\}_{x \in \mathbf{R}}$
10. $\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2, \text{ tel que } 2xy = 0, x + y = 0\right\}$
11. $\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2, \text{ tel que } (x-1)y = 0\right\}$
12. $\left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \text{ tel que } x + y + z = 0, x - y + z = 0\right\}$
13. $\{(x, y, z), \text{ tel que } \exists m \in \mathbf{R}, x = m(y + z)\}$
14. Le disque unité de $\mathbf{R}^2$.
15. L'axe des abscisses de $\mathbf{R}^2$.
16. Les deux axes (abscisses et ordonnées) de $\mathbf{R}^2$.
17. Pour f une application réelle fixée, l'ensemble des $x \in \mathbf{R}$ tels que $f(x) = 0$.
18. $E = \big\{(x,\, y,\, z,\, t) \in \mathbf{R}^4,$
    $x + 2y - z = 0 \text{ et } -y + 3t = 0\big\}$
19. $E = \left\{(x,\, y,\, z) \in \mathbf{R}^3, \text{ tel que } xy = z,\ x + y = z\right\}$
20. $E = \left\{(x,\, y,\, 2x,\, -y),\ (x, y) \in \mathbf{R}^2\right\}$

Exercice 2 (*)
Soit $E = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, soit F l'ensemble des applications croissantes sur $\mathbf{R}$, et G l'ensemble des applications décroissantes sur $\mathbf{R}$.

1. F et G sont-ils tous deux des sous-espaces vectoriels de E ?
2. L'ensemble des applications qui sont sommes d'une application croissante et d'une application décroissante est-il un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice 3 (**) (Famille filtrante)
Soient F et G deux sous espaces vectoriels de E.
Montrer que $F \cup G$ est un espace vectoriel si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

2 Espaces engendrés

Exercice 4 (*)
Soit $e_1 = (1, -1, 1, 2)$ et $e_2 = (-1, 2, 3, 1)$.
À quelles conditions sur $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, le vecteur $u = (-2, x, y, 3)$ appartient-il à $\operatorname{Vect}(e_1, e_2)$?

Exercice 5 (**)

1. $(4, 5, 1)$ est-il une combinaison linéaire de $(2, 3, 0)$ et $(1, 1, 0)$?
2. Décrire le $\mathbf{R}-$espace vectoriel engendré par $(0, 1, 1)$ et $(0, 1, 0)$.

Exercice 6 (**)
Montrer que dans $\mathbf{R}^3$,

$$\operatorname{Vect}((2, 3, -1), (1, -1, -2)) = \operatorname{Vect}((3, 7, 0), (5, 0, -7))$$

Exercice 7 (**)
Dans $\mathbf{R}^3$, les deux espaces
$F_1 = \operatorname{Vect}((1, 2, 3),\ (3, 2, 1))$
et $F_2 = \operatorname{Vect}((1, 0, -1),\ (2, 4, 6))$
sont-ils égaux ?

3 Familles libres, familles liées, bases

Exercice 8 (*)
Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $(1,1,1)$, $(2,2,2)$ dans $\mathbf{R}^3$
2. $(1,0,1)$, $(2,2,2)$ dans $\mathbf{R}^3$
3. $(1,0,1)$, $(0,2,2)$, $(3,3,0)$ dans $\mathbf{R}^3$
4. $(1,2,5)$, $(-1,2,-2)$, $(-1,6,1)$ dans $\mathbf{R}^3$
5. $(-1,-2,2)$, $(4,-3,-2)$, $(2,-1,-1)$ dans $\mathbf{R}^3$

Exercice 9 (**)
Dans $\mathbf{R}^n$, on considère une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants (e_1, e_2, e_3, e_4).
Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $(e_1, 2e_2, e_3)$
2. (e_1, e_3)
3. $(e_1, 2e_1 + e_4, e_4)$

Exercice 10 (*)
Parmi les familles suivantes, lesquelles sont génératrices de $\mathbf{R}^3$? Les familles suivantes sont-elles génératrices de $\mathbf{R}^3$?

1. $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,2))$
2. $((1,1,1),(0,1,1),(0,0,1))$
3. $((1,1,1),(0,1,1))$
4. $((1,1,1),(0,1,1),(1,0,1),(1,0,0))$

Exercice 11 (*)

1. (a,b) liée $\Rightarrow b \in \text{Vect}\,(a)$?
2. Soient a, b, c trois vecteurs non nuls.
   (a,b,c) liée $\Rightarrow c \in \text{Vect}\,(a,b)$?

Exercice 12 (**)
La famille $x \mapsto e^x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \ln x$ est-elle libre dans l'espace vectoriel des applications de $]0;+\infty[$ dans $\mathbf{R}$?

Exercice 13 (***)
Soit $(e_1, ..., e_p)$ une famille libre de E.
Montrer que

$$a \notin \text{Vect}\,(e_1, ..., e_p) \Rightarrow (e_1 + a, ..., e_p + a) \text{ est libre.}$$