Suites réelles

1 Pour commencer

Exercice 1 (Vrai / Faux)
Répondre en justifiant.

1. Le produit de deux suites majorées est-il nécessairement majoré ?
2. L'ensemble des suites stationnaires forme-il un espace vectoriel ?
3. Une suite non croissante est-elle nécessairement décroissante ?
4. L'ensemble des suites croissantes forme-il un espace vectoriel ?
5. Une suite qui converge vers une limite strictement positive ℓ a-t-elle tous ses termes strictement positifs à partir d'un certain rang ?
6. Une suite à termes positifs qui tend vers 0 est-elle nécessairement décroissante à partir d'un certain rang ?
7. La somme (ou la différence) de deux suites divergentes est-elle nécessairement divergente ?
8. Existe-t-il une suite divergente $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=0$?
9. Une suite divergente est-elle nécessairement non bornée ?
10. Une suite non bornée est-elle nécessairement divergente ?

Exercice 2 (Conditions nécessaires et suffisantes)

1. Suffit-il qu'une suite soit croissante pour qu'elle admette une limite ?
2. Est-il nécessaire qu'une suite soit croissante pour qu'elle admette une limite ?
3. Une suite croissante admet-elle nécessairement une limite ?
4. Une suite qui admet une limite est-elle nécessairement croissante ?

Exercice 3 (*)
Classer les suites, dont les termes généraux sont les suivants, par ordre de négligeabilité :

1. $\dfrac{1}{n},\ \dfrac{1}{n^2},\ \dfrac{\ln n}{n},\ \dfrac{\ln n}{n^2},\ \dfrac{1}{n\ln n}$
2. $n,\ n^2,\ n\ln n,\ \sqrt{n}\ln n,\ \dfrac{n^2}{\ln n}$

2 Suites définies explicitement

A Nature et limite

Énoncé commun aux exercices de cette partie :
Vérifier que la suite est bien définie, trouver sa nature (avec démonstration), et calculer sa limite si elle existe.

Exercice 4 (*)

1. $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\dfrac{3n^2-2n+1}{n^6-2n^4-9}$
2. $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\dfrac{3n^2-2n+1}{n\sqrt{n}+n-1}$
3. $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\dfrac{n^3+5n}{5n^3+\cos(n)+\frac{1}{n^2}}$
4. $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\dfrac{(-2)^n}{n^2}$
5. $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\dfrac{\ln n}{n}$

Exercice 5 (**)

1. $\forall n\in\mathbf{N},\ u_n=\sqrt{1+n^2}-\sqrt{1+n}$
2. $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}$
3. $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\dfrac{\sqrt{(n+1)(n+3)}+\sqrt{n}}{n}$
4. $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{1}{n}$

Exercice 6 (**)

1. $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\dfrac{\sin\left(n^3\right)}{n}$
2. $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\dfrac{1}{n}\sin n$
3. $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=(-1)^n+\dfrac{1}{n}$

Exercice 7 (**)

$$\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$$

Exercice 8 (**)

$$\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\frac{\ln(n!)}{n^2}$$

B Nature de suites

Exercice 9 (**)
Donner la nature de la suite définie par

$$\forall n\in\mathbf{N}^*,\ u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{kn}$$

3 Suites usuelles

Exercice 10 (*)

1. (u_n) est une suite géométrique de raison 2 telle que $u_3=16$. Que vaut u_0.
2. (u_n) est une suite arithmétique de raison r et (v_n) est une suite géométrique de raison q telles que $u_0=v_0$. À quelles conditions sur u_0, r et q a-t-on $u_n=v_n$ pour tout $n\in\mathbf{N}$?
3. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q, avec $u_0=1$.
   Pour tout $n\in\mathbf{N}$, on pose $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$.
   À quelle condition sur q, la suite S_n admet-elle une limite finie ?

Exercice 11 (*)
Exprimer u_n en fonction de n pour les suites :

1. $2u_{n+1} = 5u_n + 2$ et $u_0 = 2$
2. $u_{n+1} = 1 - u_n$ et $u_0 = 2$
3. $2u_{n+1} - 2u_n + 1 = 0$ et $u_0 = 4$

Exercice 12 (*)
Soit la suite définie par $(u_0, u_1) \in \mathbf{R}^2$ et

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+2}}{2}$$

Montrer que u est arithmétique et donner sa raison.

Exercice 13 (***)
On définit par réccurrence la suite (u_n) par

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} \quad \text{et} \quad u_0 = 1$$

1. Montrer que la suite est bien définie pour tout $n \in \mathbf{N}$.
2. Trouver la valeur de (u_n) en fonction de n. *Indication : on pourra poser pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = \ln(u_n)$ en justifiant l'existence et étudier v_n.*

4 Couples de suites

Exercice 14 (*)
On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définies ci-après. Montrer qu'elles convergent.

1. $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.
2. $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n^2}$.

Exercice 15 (***)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites de $[0,1]^{\mathbf{N}}$ telles que $(u_n\, v_n)$ converge vers 1. Montrer que u et v convergent. *Indication*[1]

5 Suites obtenues par récurrence

Exercice 16 (**)
Étudier les suites (u_n) définies par

1. $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n+1}$
2. $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 4$.
3. $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$
4. $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n + u_n^2}$
5. $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1 - u_n + u_n^2}$

Exercice 17 (**)
Étudier la suite définie par $u_0 = \dfrac{\pi}{4}$ et $u_{n+1} = 1 - \cos u_n$.

Exercice 18 (***)
Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$
et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$.

1. Vérifier que (u_n) est bien définie.
2. Si la suite converge, que vaut sa limite ?
3. Montrer que $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.
4. En déduire que $\forall n \in \mathbf{N},\ |u_{n+1} - 1| \leq \frac{2}{3}|u_n - 1|$
Indication[2]
5. Conclure sur la convergence de (u_n).

6 Exercices de perfectionnement

Ces exercices sont plus difficiles

Exercice 19 (***) (Quelques epsilons)
Soit u une suite réelle convergeant vers $\ell \in \mathbf{R}$. Le but des deux premières questions est de montrer que la suite c définie ci-dessous converge vers ℓ.

$$\forall n \geq 1 \quad c_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$$

1. *Étape 1.* On suppose que u_n tend vers 0 ($\ell = 0$). On se propose alors de démontrer que c_n tend vers 0.
   (a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un entier N tel que :
   $$\forall n \geq N \quad |c_n| \leq \frac{|u_1| + \cdots + |u_{N-1}|}{n} + \varepsilon$$
   (b) En déduire qu'il existe un entier $N' > N$ tel que : $\forall n \geq N' \quad |c_n| \leq 2\varepsilon$ et conclure.
2. *Cas général.* Si u_n tend vers ℓ, considérer la suite u' de terme général $u_n - \ell$ et utiliser l'étape 1 pour démontrer le théorème.
3. Réciproquement, si on suppose la suite c convergente, peut-on en déduire que la suite u est convergente ?

Exercice 20 (***)
Soit (u_n) une suite à valeurs positives telle que

$$\forall (p,q) \in \mathbf{N}^2, \quad u_{p+q} \leq u_p + u_q$$

1. Justifier que $\inf_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{u_n}{n}$ existe.
2. Soit $q \in \mathbf{N}^*$, fixé et $n \geq q$.
On peut donc écrire $n = kq + r$ avec $r \in [\![0, q-1]\!]$. Montrer que
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \geq q, \ \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \frac{u_n}{n} \leq \frac{u_q}{q} + \varepsilon$$
3. Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n>0}$ converge et que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = \inf_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{u_n}{n}$$

1. Utiliser un théorème de comparaison.

2. On pourra utiliser la quantité conjuguée.