

LES NOMBRES RÉELS

1 RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS

Exercice 1 (*)

Résoudre et représenter graphiquement les solutions des inégalités suivantes :

1. $\frac{x+3}{x-5} < 1$
2. $\frac{x+3}{x-5} < 0$
3. $(x-2)(x-1) < 0$
4. $x < \frac{1}{x}$

Exercice 2 (*)

Résoudre les inégalités suivantes :

1. $-x^3 + 2x^2 \geq 0$
2. $2x^2 - 4x - 6 \geq 0$
3. $x^3 + 5x^2 + 8x + 6 < 2$
4. $x^3 + x^2 - 5x - 5 \leq 0$

Exercice 3 (*)

Résoudre les inégalités suivantes :

1. $|x-5| < 2$
2. $|x+1| > 3$
3. $\frac{1+x}{1-x} < |x-1|$

Exercice 4 (**)

Résoudre les égalités suivantes :

1. $x|x| = 3x + 2$
2. $|x+2| + |3x-1| = 4$
3. $|x^2 + x - 3| = |x|$
4. $x + |x| = \frac{2}{x}$

Exercice 5 (**)

Résoudre les égalités suivantes :

1. $\ln((x+2)(x-1)) = \ln 2$
2. $x + \sqrt{2x+1} = 1$

Exercice 6 (*)

Montrer que

$$\forall x > 0, \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1}{1+x}$$

2 MAJORANTS-MINORANTS

Exercice 7 (*)

Soient A et B deux parties non vides majorées de \mathbf{R} telles que $A \subset B$.

Montrer que $\sup A \leq \sup B$.

Exercice 8 (**)

1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est-elle majorée sur \mathbf{R}_+ , est-elle minorée sur ce même intervalle ?
2. Donner sa borne inférieure en justifiant. Est-ce un minimum ?

Exercice 9 (**)

$$E = \{1 - (-1)^n, n \in \mathbf{N}\}$$

1. L'ensemble est-il majoré ? minoré ?
2. S'il est majoré, donner sa borne supérieure, est-ce un maximum ?
3. S'il est minoré, donner sa borne inférieure, est-ce un minimum ?

Exercice 10 (**)

$$E = \left\{ \frac{2n-1}{n}, n \in \mathbf{N}^* \right\}$$

1. L'ensemble est-il majoré ? minoré ?
2. S'il est majoré, donner sa borne supérieure, est-ce un maximum ?
3. S'il est minoré, donner sa borne inférieure, est-ce un minimum ?

Exercice 11

On considère les fonctions a et b définies sur \mathbf{R} par:

$$a(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x \geq 3 \\ x^2 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

$$b(x) = \begin{cases} 1+1/x & \text{si } x > 0 \\ \sqrt{-x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1. Les fonctions sont-elles majorées ? minorées ?
2. Si elles sont majorées, donner leur borne supérieure, est-ce un maximum ?
3. Si elles sont minorées, donner leur borne inférieure, est-ce un minimum ?

Exercice 12 ()**

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, 3u_{n+1} + 2u_n + 1 = 0$$

1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ que l'on déterminera tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n \lambda - \frac{1}{5}$$

2. Pour tout entier n , trouver l'expression de u_n en fonction de u_0 et de n .
3. Donner $\sup \{u_n, n \in \mathbf{N}\}$. Justifier
4. Donner $\inf \{u_n, n \in \mathbf{N}\}$. Justifier

3 PARTIE ENTIÈRE**Exercice 13 (**)**

Démontrer que $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

Exercice 14 ()**

Démontrer que $\forall x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}^*$,

$$\left\lfloor \frac{1}{n} \lfloor nx \rfloor \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

4 INÉGALITÉS PLUS SOPHISTIQUÉES**Exercice 15 (*)**

Démontrer que pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\min(x, y) = \frac{(x + y) - |x - y|}{2}$$

$$\max(x, y) = \frac{(x + y) + |x - y|}{2}$$

Exercice 16 ()**

1. Résoudre dans \mathbf{R} , l'inéquation suivante :

$$x^2 - x - 1 \geq 0$$

2. Résoudre dans \mathbf{R} , la chaîne d'inéquations suivantes :

$$1 + x - x^2 \leq x^2 - 3x + 1 \leq x^2 - x - 1$$

3. Résoudre dans \mathbf{R} , l'inéquation :

$$|x^2 - 3x - 1| \leq x^2 - x - 1$$

Exercice 17 ()**

Soient $(a, b) \in \mathbf{R}_+^2$, non tous nuls.

Montrer que

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

Vocabulaire :

$\frac{a+b}{2}$ est la moyenne arithmétique,

\sqrt{ab} est la moyenne géométrique,

$\frac{2ab}{a+b}$ est la moyenne harmonique.

Exercice 18 ()**

On définit f sur \mathbf{R}_+ par

$$f : x \mapsto \sup_{n \in \mathbf{N}} \frac{x^n}{n!}$$

Montrer que f est bien définie sur \mathbf{R}_+ et donner son expression sans utiliser les bornes supérieures (ou inférieures).

Exercice 19 ()**

1. Soient $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, montrer que $(x + y)^2 \geq 4xy$
2. En déduire que

$$\forall (a, b, c) \in (\mathbf{R}_+)^3, (a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$$

Exercice 20 (*)**

Montrer que pour tout $n \geq 3$,

$$\sqrt[n]{n} < \sqrt[n]{n!}$$

Exercice 21 ()**

1. (*) Montrer que $\forall x \in [0, 1], 0 \leq x(1 - x) \leq \frac{1}{4}$
Retenir cette inégalité.
2. En déduire que $\forall (a, b, c) \in [0, 1]^3$,

$$\min(a(1 - b), b(1 - c), c(1 - a)) \leq \frac{1}{4}$$