

# PROBABILITÉS SUR UN UNIVERS FINI

Les applications numériques peuvent se faire à la calculatrice.

## Exercice 1 (Pour commencer)

Soit  $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ ,

- Déterminer une probabilité  $\mathbf{P}$  sur  $\Omega$ , tel que, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\mathbf{P}(\{k\})$  soit proportionnel à  $k$ .
- Déterminer une probabilité  $\mathbf{P}$  sur  $\Omega$ , tel que, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\mathbf{P}(\{1, 2, \dots, k\})$  soit proportionnel à  $k^2$ .
- Déterminer une probabilité  $\mathbf{P}$  sur  $\Omega$ , tel que, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\mathbf{P}(\{k\})$  soit proportionnel à  $k^2$ .

## Exercice 2 (\*\*)

Un jeu de cartes est truqué : on a remplacé dans ce jeu, une carte autre que l'as de pique par un second as de pique.

On tire simultanément 4 cartes.

- Quelle est la probabilité de déceler la supercherie ?
- On recommence  $n$  fois l'expérience (en remettant à chaque fois les 4 cartes dans le jeu). Quel est le nombre minimum d'expériences à réaliser pour découvrir la supercherie avec une probabilité supérieure à 0,95.

## 1 ÉVÉNEMENTS INDÉPENDANTS

### Exercice 3 (\*)

On lance un dé à six faces parfaitement équilibré. Les événements suivants sont-ils indépendants ?

$A$  : « on obtient le tirage 2, 4 ou 6 »

$B$  : « on obtient le tirage 3 ou 6 »

### Exercice 4 (\*\*)

Montrer qu'un événement  $A$  est indépendant de tout autre événement si et seulement si  $\mathbf{P}(A) = 0$  ou 1.

## 2 PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

### Exercice 5 (\*\*)

Soient  $A$  et  $B$  deux événements avec  $\mathbf{P}(A) > 0$ . Comparer les probabilités conditionnelles

$$\mathbf{P}_{A \cup B}(A \cap B) \text{ et } \mathbf{P}_A(A \cap B)$$

### Exercice 6 (\*)

Un individu tente d'allumer sa cigarette..

Pour chaque allumette, il a la probabilité  $p$  de réussir à l'allumer. Chaque essai est supposé indépendant des précédents.

- Quelle est la probabilité qu'il y parvienne au  $n$ -ième essai exactement.
- Il dispose de  $n$  allumettes au total. Quelle est la probabilité qu'il arrive à allumer sa cigarette ?

### Exercice 7 (\*)

On classe des gérants de portefeuille en deux catégories : les bien informés et les autres. Lorsqu'un gérant bien informé conseille son client sur une valeur boursière, la probabilité que le cours de cette action suive ses prédictions est de 0,8. Si le gérant est mal informé, la probabilité que le cours ne suive pas ses prédictions est 0,6.

On sait par ailleurs que si l'on choisit au hasard un gérant de portefeuille, il y a une chance sur 10 pour que celui ci soit un gérant bien informé.

Un client choisit au hasard un gérant et lui propose une position sur une valeur.

- Sachant que le cours de cette valeur suivi les prédictions du gérant, quelle est la probabilité pour que ce gérant soit mal informé ?
- Le gérant informe le client dix fois sur des valeurs, et ses informations se sont révélées justes les dix fois. Il propose à présent une position sur une nouvelle valeur. Quelle est la probabilité qu'il ait raison.

### Exercice 8 (\*) (Bluff ?)

Vous jouez au poker. C'est le dernier tour de mise, il ne reste plus que Jérémie en face de vous. Il y a 540 dans le pot et Jérémie relance encore 200 par dessus. Vous hésitez à le suivre.

Vous savez que la probabilité qu'il bluffe est de 25%. Lorsqu'il bluffe, il relance 9 fois sur 10, par contre, lorsqu'il ne bluffe pas, il ne relance que 6 fois sur 10.

- Quelle est la probabilité qu'il bluffe ?
- (Utiliser le cours de terminale) Avez-vous intérêt à le suivre (sachant que vous gagnez s'il bluffe, mais que vous perdez sinon) ?

### Exercice 9 (\*\*) (Le caméléon)

Un caméléon daltonien posé sur du vert prend soit la couleur verte, soit la couleur rouge, avec la même probabilité. Quand il est posé sur du rouge, il prend soit la couleur verte une fois sur cinq, soit la couleur rouge quatre fois sur cinq.

Julie étale chaque matin sa couverture bicolore sur l'herbe, une fois sur trois côté rouge visible, deux fois sur trois côté vert visible.

Un couple de caméléon daltoniens vient s'ébattre sur sa couverture.

- Calculer la probabilité qu'ils soient de la même couleur.
- Les événements « le caméléon mâle est vert » et « le caméléon femelle est vert » sont-ils indépendants ?
- Sachant qu'ils sont de couleurs différentes, calculer la probabilité que la face apparente de la couverture soit rouge.

## 3 CHAÎNE DE MARKOV

**Exercice 10 (\*\*)**

Un fumeur cherche à arrêter de fumer chaque jour. On note  $p_n$  la probabilité qu'il fume le  $n$ -ième jour.

- S'il a réussi à ne pas fumer un jour, il ne fume pas le lendemain avec une probabilité  $\frac{1}{2}$ .
- S'il fume un jour, il ne fume pas le lendemain avec une probabilité  $\frac{1}{4}$ .

1. Calculer  $p_{n+1}$  en fonction de  $p_n$ .
2. Calculer  $p_n$  en fonction de  $p_1$  et de  $n$ .
3. Donner  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ .

**4 CASSE-TÊTE****Exercice 11 (\*)**

Une famille a deux enfants.

1. Quelle est la probabilité que les deux soient des garçons ?
2. Quelle est cette probabilité sachant que l'aîné est un garçon ?
3. On sait que l'un des deux enfants est un garçon, quelle est la probabilité que l'autre le soit aussi ?
4. (\*\*\*) On sait que l'un des deux enfants est un garçon et né un 29 février, quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon ?

**Exercice 12 (\*\*\*) (Le jeu des trois portes)**

Dans le jeu « Let's make a deal », trois portes A,B, C sont fermées. Derrière l'une d'elles se trouve une Ferrari, derrière les autres, une chèvre.

- le joueur choisit une porte, disons A
- Le présentateur sait où se trouve la voiture, et l'informe qu'elle n'est pas derrière la porte B puis il lui offre la possibilité de réviser son choix.

Le joueur a-t-il intérêt à réviser son choix ?

On suppose que le joueur est davantage attiré par la Ferrari que par la chèvre.

*Indication de dernier recours*<sup>1</sup>

---

1. Une fois que la porte A a été choisie, poser A: « la Ferrari est derrière la porte A » ; de même pour B et C. Poser I : « le présentateur indique qu'elle n'est pas derrière la porte B ».