Suites réelles - Exercices supplémentaires

Exercice 1 (**)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles à termes strictements positifs telles qu'à partir d'un certain rang n_0, on ait

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

1. Montrer que si v converge vers 0 alors u aussi.
2. Montrer que si u diverge vers $+\infty$, alors v aussi.

Exercice 2 (**)
Soit la suite harmonique $(H_n)_{n\geq 1}$ définie pour tout $n \geq 1$ par $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $H_{2^{n+1}} \geq H_{2^n} + \frac{1}{2}$.
2. En déduire que H_n tend vers $+\infty$.

Exercice 3 (**)
Soit (u_n) une suite bornée. On suppose que la suite v définie par $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}$ tend vers 0.
Montrer que u_n tend vers 0.

Exercice 4 (**)
Dédicace spéciale pour Paul.

1. Soit (u_n) une suite numérique à valeurs positives et $\ell \geq 0$. On suppose que u_n^2 tend vers ℓ^2, montrer que u_n tend vers ℓ.
2. Est-ce encore vrai si on retire l'hypothèse de positivité de la suite ?
3. Montrer que si u et v sont deux suites réelles telles que $u_n^2 + u_n v_n + v_n^2 \to 0$, alors $u_n \to 0$ et $v_n \to 0$.

Exercice 5 (***) (Irrationnalité de e)

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$$

1. Montrer que (u_n) et (v_n) ont une limite commune.
2. On admet que cette limite est $\mathrm{e} = \exp(1)$. Montrer que e est irrationnel.

Indication en note de bas de page[1]

1. Poser par l'absurde $e = \frac{p}{q}$, et comparer avec u_q et v_q. En déduire qu'un entier se trouve *strictement* compris entre deux entiers consécutifs. Conclure.