TD mardi 4 décembre

Méthode :

- Commencer par essayer de faire cet exercice comme en situation de DS, en faisant le maximum de questions.
- Si vous êtes complètement bloqué, se référer aux indications pour essayer de relancer la réflexion.

Exercice 1
On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $x_0 \in]0,1[$, et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_{n+1} = x_n - x_n^2$.

1. Dresser le tableau de variation de la fonction f à valeurs dans $\mathbf{R}$, définie sur $[0,1]$, par : $f(x) = x - x^2$.
2. (a) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est monotone et convergente.
   (b) Déterminer la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
3. (a) Établir pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'encadrement $0 < x_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
   (b) Retrouver ainsi la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
4. Soit $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = nx_n$.
   (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.
   (b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un réel ℓ que l'on ne demande pas de calculer.
   (c) Montrer que $0 < \ell \leq 1$.
5. On considère les suites $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad w_n = n\,(v_{n+1} - v_n) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{w_k}{k}.$$

   (a) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente.
   (b) Exprimer pour tout $n \in \mathbf{N}$, w_n en fonction de x_n et de v_n.
   (c) En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\ell\,(1-\ell)$.
   (d) À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que $\ell = 1$.
   Indication : on pourra utiliser un résultat déjà prouvé en exercice.