Applications linéaires

1 Applications

Exercice 1 (Vrai-Faux)
Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

1. $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (5x+2y, x-y) \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (xy, y) \end{array}\right.$
3. $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+1, y, x+y) \end{array}\right.$
4. $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y, z) \end{array}\right.$
5. $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^4 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x,x,x,x) \end{array}\right.$
6. $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R}) & \to & \mathcal{C}(\mathbf{R},\mathbf{R}) \\ f & \mapsto & f'+5f \end{array}\right.$

Exercice 2 (*)
Soit $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ définie par $f(x,y)=(x+y,x-y)$.
Montrer que f est un automorphisme de $\mathbf{R}^2$ et donner sa réciproque.

Exercice 3
On note (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

1. Montrer que la donnée $\begin{cases} \varphi(e_1) & = e_1+e_2 \\ \varphi(e_2) & = e_1-e_2 \\ \varphi(e_3) & = e_1+\lambda e_3 \end{cases}$ définit un unique endomorphisme $\varphi\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$.
2. Soit $x=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^3$. Calculer $\varphi(x)$.
3. Quelle valeur donner à λ pour que φ soit injective ? soit surjective ?

2 Images et noyaux

Exercice 4 (*)
Donner l'image et le noyau de

1. $(x,y)\mapsto(x+3y,x-3y)$
2. $(x,y)\mapsto(x,y,x+y)$
3. $(x,y,z)\mapsto(x+y+2z,2x-3y+z)$
4. $(x,y,z)\mapsto(x-y+z,x+5y-z,2x+2y+3z)$
5. $(x,y,z)\mapsto(x-y-z+t,x+2y+z-t,3x-z+t,2x-y+t)$

Exercice 5 (**)
Soient E,F,G trois espaces vectoriels,
$f\in\mathcal{L}(E,F)$ et $g\in\mathcal{L}(F,G)$.
Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Interpréter la proposition « $g\circ f=0_{\mathcal{L}(E,G)}$ » avec $\operatorname{Im} f$ et $\ker g$.
2. Montrer que $f(\ker(g\circ f))=\ker g\cap\operatorname{Im} f$.

Exercice 6 (***)
Soient $f,g\in\mathcal{L}(E)$, montrer que si f et g commutent, alors $\ker g$ et $\operatorname{Im} g$ sont stables par f.
Rappel de vocabulaire :
Un sous espace vectoriel F de E est dit stable par f, si $f(F)\subset F$.

Exercice 7 (***)
Soient E et F deux espaces vectoriels, et $f\in\mathcal{L}(E,F)$.
On considère $\mathcal{E}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ une famille de vecteurs de E, et on note $\mathcal{F}=(f(u_1),f(u_2),\cdots,f(u_n))$.

- Montrer que si f est injective et $\mathcal{E}$ libre, alors $\mathcal{F}$ est libre.
- Montrer que si f est surjective et $\mathcal{E}$ est génératrice de E, alors $\mathcal{F}$ est génératrice de F.