Séries à termes positifs

1 Pour commencer

Exercice 1 (*)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'entiers positifs. À quelle condition simple sur la suite, la série $\sum u_k$ converge-t-elle?

Exercice 2 (*)
Soit (u_n) une suite réelle strictement positive.
Montrer que la série

$$\sum \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)$$

converge si et seulement si la suite (u_n) converge vers une limite strictement positive.

Exercice 3 (**) (méthode)
À l'aide de la comparaison série intégrale, donner un équivalent en $+\infty$ de

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$.
2. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}$.

Exercice 4 (*)
Montrer l'existence et calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Exercice 5 (grand classique)
Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$..
On considère la série $\sum u_n$ appelée série harmonique alternée.

1. Étudier l'éventuelle convergence absolue de la série.
2. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.
   (a) Montrer que (S_{2k}) et (S_{2k+1}) sont des suites adjacentes.
   (b) En déduire que la série $\sum u_n$ est semi-convergente.

2 Entraînement

Exercice 6 (*)
Étudier la nature de la série

$$\sum \left(\sqrt{k+1} - \lambda\sqrt{k}\right)$$

en fonction de $\lambda \in \mathbf{R}$.

Exercice 7 (* → **)
Donner la nature de la série de terme général

1. $\ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$
2. $\dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$
3. $n^{-\ln(\ln n)}$
4. $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
5. $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n}$
6. $\dfrac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$
7. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$

Exercice 8 (*)
Soit (u_n) une suite positive telle que $\sum u_n$ converge.
Montrer que $\sum u_n^2$ converge.
La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 9 (**)
Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$,
la série $\sum \left(\sqrt{k+1} - \lambda\sqrt{k}\right)$ diverge.

3 Approfondissement

Exercice 10 (*)
Montrer que si $\sum (u_n + v_n)$ converge, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exercice 11 (***) (Séries de Bertrand)
Soient α et β deux réels. On appelle série de Bertrand, la série

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$$

Étudier la nature de cette série.

Exercice 12 (***)

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle décroissante, positive.
   On pose
   $$\forall n \in \mathbf{N}, \quad v_n = 2^n u_{2^n}$$
   Montrer que
   $$\sum u_n \text{ converge si et seulement si } \sum v_n \text{ converge}$$
2. Application : étudier la convergence des séries
   $$\sum \frac{1}{n\ln n} \quad \text{et} \quad \sum \frac{1}{n\ln n\ln(\ln n)}$$
3. *Généralisation :* Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle décroissante, positive et $p \in \mathbf{N}$ tel que $p \geqslant 2$.
   On pose
   $$\forall n \in \mathbf{N}, \quad v_n = p^n u_{p^n}$$
   Montrer que
   $$\sum u_n \text{ converge si et seulement si } \sum v_n \text{ converge}$$