Espaces vectoriels en dimension finie

1 Familles de vecteurs de $\mathbf{R}^n$

Exercice 1 (*)
On pose $e_1 = (-1, 1, 1)$, $e_2 = (1, -1, 1)$ et $e_3 = (1, 1, -1)$.
Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbf{R}^3$ et donner les coordonnées de $(8, 4, 2)$ dans cette base.

Exercice 2 (*)
À quelles conditions sur a la famille suivante forme-t-elle une base de $\mathbf{R}^3$?

$$\big((1, -2, 0),\ (2, -1, 2), (1, 0, a)\big).$$

Pour $a = 0$, exprimer la base canonique dans cette base.

Exercice 3 (*)
Montrer que la famille

$$\big((2, 1, 1),\ (1, 4, 3),\ (0, 1, 1),\ (1, 2, 3)\big)$$

forme une famille génératrice de $\mathbf{R}^3$.
Trouver une base extraite de cette famille.

Exercice 4 (*)

1. Donner le rang de la famille :
$$S = \big\{u_1 = (1, 2, 1, 0), u_2 = (-1, 1, 1, 1),\\ u_3 = (2, -1, 0, 1), u_4 = (2, 2, 2, 2)\big\}.$$
2. À partir d'une famille libre extraite de S, la compléter pour obtenir une base de $\mathbf{R}^4$.

Exercice 5 (**)
Dans $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs

$$v_1 = (1, 1, 1, 1), \quad v_2 = (1, 2, 3, 4), \quad v_3 = (3, 1, 4, 2),\\ v_4 = (10, 4, 13, 7), \quad v_5 = (1, 7, 8, 14).$$

1. La famille de ces cinq vecteurs est-elle libre ?
2. Quel est son rang ?
3. Extraire de cette famille une base $\mathcal{E}$ de $F = \mathrm{Vect}\,(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$.
4. À quelle condition sur ses coordonnées, un vecteur (x_1, x_2, x_3, x_4) appartient-t-il à F ?
5. Compléter la famille $\mathcal{E}$ en une base de $\mathbf{R}^4$.

2 Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 6 (*) (Égalité d'espaces)
Soient F, G les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$ suivants :
$F = \big\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 / x + y + z = 0 \text{ et } 2x + y + z - t = 0\big\}$
$G = \mathrm{Vect}\,\big((1, -2, 1, 1), (1, 2, -3, 1), (5, -3, -2, 5)\big)$

1. Calculer la dimension de F.
2. Montrer que $G \subset F$.
3. Montrer que $G = F$.

Exercice 7 (**)

1. Donner une base et la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$.
(matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$)
2. Faire de même avec $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$.
(matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$)

Exercice 8 (**)
Soit E le sous-ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ défini par

$$E = \left\{ M\,(a, b, c)) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}, \quad (a, b, c) \in \mathbf{R}^3 \right\}$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Montrer que E est stable par produit matriciel.
3. Donner la dimension de E.

Exercice 9 (**)
Dans $\mathbf{R}^n$, on considère une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants (e_1, e_2, e_3, e_4).
Les familles suivantes sont-elles libres :

1. $(e_1, 2e_2, e_3)$.
2. (e_1, e_3).
3. $(e_1, 2e_1 + e_4, e_4)$.
4. $(3e_1 + e_3, e_3, e_2 + e_3)$.
5. $(2e_1 + e_2, e_1 - 3e_2, e_4, e_2 - e_1)$.
6. $(e_1 + e_2, e_1 - e_2, e_3, e_1 + 2e_2 - e_4, 3e_1 - e_2 + e_3)$.

3 Approfondissement

Exercice 10 (***)
Soient $p \in \mathbf{N}^*$ et E l'ensemble des suites réelles de période p.
Montrer que E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Donner la dimension de E et une base.

Exercice 11 (***) (Lemme d'échange)
Soient $(e_1, ..., e_n)$ et $(e'_1, ..., e'_n)$ deux bases d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E.
Montrer qu'il existe $j \in \{1, ..., n\}$ tel que la famille $(e_1, ..., e_{n-1}, e'_j)$ soit encore une base de E.