Changements de base

Exercice 1 (*)
Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de E
et $\mathcal{B}' = (e_n, e_{n-1}, \cdots, e_1)$ la base lue en sens inverse.
Exprimer les matrices de passage : $\mathrm{Pa}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$ et $\mathrm{Pa}(\mathcal{B}' \to \mathcal{B})$.

Exercice 2 (*)
On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$ et on considère l'application linéaire $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $(x, y) \mapsto (2y, 2x)$.

1. Déterminer la matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$ de f dans la base $\mathcal{B}$.
2. Montrer que les vecteurs $c_1 = (1, 1)$ et $c_2 = (-1, 1)$ forment une base de $\mathbf{R}^2$ que l'on notera $\mathcal{C}$.
3. Déterminer les matrices $M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$, $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ et $M_{\mathcal{C}}(f)$.

Exercice 3 (*)
Soit (e_1, e_2, e_3) une base de $\mathbf{R}^3$.
Chercher les applications $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ telles que la matrice de f dans (e_1, e_2, e_3) soit la même que dans (e_2, e_3, e_1).

Exercice 4 (*)
E est un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} : (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E.
On pose $u = e_1 + e_2 - e_3,\ v = e_1 - e_2 + e_3,\ w = e_1 + e_2 - e_3$

1. Montrer que $\mathcal{B}' : (u, v, w)$ est une base de E et donner la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ et celle de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$.
2. Soit f l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 5 (**)
Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2. Qu'en déduire sur f ?
2. Montrer que l'on peut construire une base $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ de E telle que la matrice de A dans $\mathcal{B}'$ soit
   $$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   Donner la matrice de passage.

Exercice 6 (**)
Soit E, un espace vectoriel de dimension n.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent non nul de E. Soit p son indice de nilpotence (le plus petit entier tel que $f^p = 0$).

1. Soit $x \notin \ker f^{p-1}$.
   Montrer que $(x, f(x), f^2(x), ..., f^{p-1}(x))$ est libre.
2. En déduire que $f^n = 0$.
3. On suppose à présent que $n = p$.
   Montrer que $(x, f(x), f^2(x), ..., f^{p-1}(x))$ est une base de E.
4. Donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 7 (***)
Soit E un espace de dimension fini et f un endomorphisme de E de rang 1.

1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $f^2 = \lambda f$.
2. Montrer que $\lambda = \mathrm{tr}(f)$.

Exercice 8 (***)
Soit E un $\mathbf{R}$-ev de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ non nulle telle que $f^2 = 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f soit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 9 (**)
Soit f un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie, tel que $f^2 = 0$. En exploitant $\mathrm{Im}\,(f)$ et $\ker(f)$, construire une base de E où f est représentée par une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0_{s,r} & 0_s \\ I_r & 0_{r,s} \end{pmatrix}$.

Exercice 10 (**)
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On considère $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \cdots, X^n)$ la base canonique de $\mathbf{R}_n[x]$.

1. Montrer que toute matrice inversible peut être interprétée comme une matrice de passage.
2. Justifier que A est inversible.
3. Montrer que A peut être interprétée comme la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers une autre base $\mathcal{B}'$ que l'on précisera.
4. En déduire l'inverse de A.

Exercice 11 (***)
Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A.

1. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{C}$ soit D.

2. Déterminer la matrice P de $\mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$. Calculer P^{-1}.

3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

4. En déduire le terme général des suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}, (y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, \begin{cases} x_{n+1} & = 4x_n - 2(y_n + z_n) \\ y_{n+1} & = x_n - z_n \\ z_{n+1} & = 3x_n - 2y_n - z_n \end{cases}$$

Exercice 12 (***)
Trouver l'ensemble des matrices qui ne sont semblables qu'à elle-mêmes.