

# CALCUL ÉLÉMENTAIRE

## 1 SIMPLIFICATION

### Exercice 1 (\*)

Pour  $n \in \mathbf{N}^*$  et  $a \in \mathbf{R}^*$ , simplifier

1.  $2^n + 2^n$ .
2.  $2^n \cdot 2^n$ .
3.  $(2^{2n-1} - 2^n + 1)(2^{2n-1} + 2^n + 1)$ .
4.  $3 \frac{\frac{1}{3^{n-1}}}{\frac{1}{3^n}}$ .
5.  $\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}$ .
6.  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n+1}}$ .
7.  $(a^{n^2})^2$ .
8.  $\frac{a^{n^2}}{a^n}$ .
9.  $a^{3n} (a^n)^3$ .
10.  $(a^n)^n$ .
11.  $(a^n)(a^n)$ .
12.  $\frac{a^n - a^{2n}}{(2a)^n}$ .

### Exercice 2

Exprimer en fonction de  $n \geq 2$

1.  $1 + 2 + \dots + (n-1) + n + (n-1) + \dots + 2 + 1$ .
2.  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$ .
3.  $1 + 2 + 4 + \dots + 2^n$ .
4.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}$ .
5.  $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)$ .

### Exercice 3

Factoriser au maximum (il ne doit y avoir ni puissance, ni fraction, ni racine carrée, ni exposant)

1.  $6 - 6x + 3x(x-1) - x(x-1)(x-2)$ .
2.  $6x^3 + 5x^2 - 3x - 2$ .
3.  $mx^2 - (1 + m^2)x + m$ .
4.  $4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$ .

## 2 RÉOLUTION D'ÉQUATIONS

### Exercice 4

Soit  $a > 0$ , résoudre sur  $\mathbf{R}$ ,

1.  $x = \sqrt{2-x}$
2.  $\ln(a)x(x-1) = \ln(a)x$ .
3.  $\ln(a)x(x-1) \leq x$ .
4.  $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = 0$ .
5.  $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 = 0$ .

### Exercice 5

1. Montrer que le changement de variables  $X = x + 1/x$  simplifie l'équation  $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0$  en une équation du second degré en  $X$ .
2. En déduire l'ensemble de ses solutions sur  $\mathbf{R}$ .
3. Sur le même modèle, résoudre l'équation  $x^4 + x^3 - 10x^2 + x + 1 = 0$ .

## 3 INÉGALITÉS

### Exercice 6

Pour  $a > 0$ , traduire sous forme d'inégalité de  $x$

$$|ax + b| \leq c.$$

### Exercice 7

Montrer que  $\forall a \in \mathbf{R}, \forall \alpha > 0, \forall x \geq 0$

$$(x+a)e^{-\alpha x} \leq \max\left(a, \frac{1}{\alpha}\right)$$