Révisions de début d'année

Exercices de révisions et d'approfondissement sur le programme de terminale (et quelques prolongements).

1 Développements et factorisations

Exercice 1 (*)
Factoriser les expressions suivantes sur $\mathbf{R}$.

1) $a = (x-a)^2 - (x-a)^3$.
2) $b = (2x-1)^2 - 9\,(x-1)^2$.
3) $c = (x+1)^2 + x^2 - 1$.
4) $d = x^2 - x - 1$.
5) $e = 3(x+1)^2 + 6\,(3x+1) + 9$.

Rappel : si α annule d'une expression polynomiale en x, alors $(x-\alpha)$ factorise cette expression.
Si $\Delta < 0$, alors l'expression polynomiale de degré 2 n'est pas factorisable sur $\mathbf{R}$ (ou uniquement par des constantes).

Exercice 2 (*)
Factoriser les expressions suivantes sur $\mathbf{R}$.

1) $a = x^4 - 2x^2 + 1$.
2) $b = x^4 + x^2 - 2$.
3) $c = x^4 - x^2$.
4) $d = x^3 + x^2 + x + 1$.

Exercice 3 (*)
Pour $x > 0$, simplifier l'expression $\sqrt{\dfrac{x^{n+2} + x^2}{x^{n+1} + x}}$.

Exercice 4 (*)
Montrer que l'expression suivante ne dépend pas de $n \in \mathbf{N}$ et donner sa valeur.

$$\frac{\left(8^{n+1} + 8^n\right)^2}{\left(4^n - 4^{n-1}\right)^3}.$$

2 Équations polynomiales

Exercice 5 (*)
Résoudre les équations suivantes en x (sur $\mathbf{R}$).

1) $x^3 - 8x = x^2$.
2) $x^4 - 7x^2 - 8 = 0$.

Rappel : Dans le cadre des équations polynomiales, résoudre ou factoriser procèdent de la même démarche comme vu plus haut.

Exercice 6 (*)
Résoudre les équations suivantes en x (sur $\mathbf{R}$).

1) $x^2 + \left(2\sqrt{2} - 2\right)x + 3 = 2\sqrt{2}$.
2) $2x^2 - \left(\sqrt{6} + 2\sqrt{2}\right)x + \sqrt{3} = 0$.

3 Équations

Exercice 7 (*)
Résoudre les équations suivantes sur $\mathbf{R}$.

1) $\sqrt{x} = x$.
2) $\sqrt{x} = -x$.
3) $\sqrt{-x} = x$.
4) $\sqrt{x^2} = x$.
5) $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$.

Exercice 8 (**)
Résoudre les équations suivantes sur $\mathbf{R}$.

1) $x - 4 = \sqrt{2x-5}$.
2) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$.

Exercice 9 (**)
Résoudre les équations suivantes en x (sur $\mathbf{R}$) en fonction de $a \in \mathbf{R}$.

1) $|x-a| = a$.
2) $\sqrt{x^2 - a} = 1$.

Exercice 10 (**)
Résoudre l'équation sur $\mathbf{R}$

$$x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - 4 = 0.$$

Indication : on pourra utiliser le changement de variable $X = x + \frac{1}{x}$.

Exercice 11 (**)
Soit $m \in \mathbf{R}$, on considère l'équation

$$(E_m) \qquad (m-2)\,x^2 + 2\,(m-4)\,x + (m-4)\,(m+2) = 0.$$

1) Discuter, suivant les valeurs de m, l'existence et le nombre de solutions de l'équation (E_m).
2) Pour quelles valeurs de m, l'équation admet-elle -1 comme solution ?

4 Inéquations et inégalités

Exercice 12 (*)
Donner l'ensemble des solutions des inéquations :

1) $\dfrac{1}{x} < -2$.
2) $\dfrac{1}{x} > -2$.

Exercice 13 (*)
Donner l'ensemble des solutions des inéquations :

1) $(x-2)(x-1) \geqslant 0$.
2) $\left(x^2-1\right)\left(x^2+4x-2\right) \geqslant 0$.
3) $\dfrac{x}{x+1} < 0$.
4) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 \geqslant 0$.
5) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 \leqslant 0$.

Exercice 14 (*)
Résoudre et représenter graphiquement les solutions des inégalités suivantes :

1) $(x-2)(x-1) < 0$.
2) $\dfrac{x+3}{x-5} < 0$.
3) $\dfrac{x+3}{x-5} < 1$.
4) $x < \dfrac{1}{x}$.

Exercice 15 (*)
Résoudre les inégalités suivantes :

1) $-x^3 + 2x^2 \geqslant 0$
2) $2x^2 - 4x - 6 \geqslant 0$
3) $x^3 + 5x^2 + 8x + 6 < 2$
4) $x^3 + x^2 - 5x - 5 \leqslant 0$

Exercice 16 (*)
Montrer que pour tout $x \geqslant 1$,

$$\frac{1-x}{\sqrt{x}+1} \geqslant \frac{1-x}{2}.$$

Exercice 17 (*)
Résoudre les inéquations suivantes sur $\mathbf{R}$.

1) $x+1 < x-1$.
2) $(x+1)^2 < (x-1)^2$.
3) $\sqrt{x-1} < \sqrt{x+1}$.
4) $\sqrt{(x-1)^2} < \sqrt{(x+1)^2}$.

Exercice 18 (**)
Résoudre les inéquations suivantes sur $\mathbf{R}$.

1) $0 \leqslant \dfrac{x}{x^2-1} \leqslant 1$.
2) $\dfrac{x^3-1}{x+1} \leqslant x^2 - x - 1$.
3) $|x-3| + |x+4| \leqslant 7$.

Exercice 19 (*)
Montrer que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\tan(x) > x$.

Exercice 20 (*)
Résoudre

$$\mathrm{e}^x + 1 \leqslant \mathrm{e}^{-x}.$$

Exercice 21 (**)

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$.
2) En déduire que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
3) En déduire que pour tout $x > 0$,

$$0 \leqslant \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \leqslant \frac{1}{x}.$$

Exercice 22 (**)
Montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$x\ln(x) > -\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Exercice 23 (**)
Montrer que pour tous réels x et y, on a l'inégalité

$$2\,|xy| \leqslant x^2 + y^2.$$

Peut-on avoir l'égalité ? Si oui, donner tous les couples (x, y) solution.

Exercice 24 (**)
Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, on a

$$\max(x,y) \leqslant \sqrt{x^2+y^2} \leqslant |x|+|y| \leqslant 2\max(|x|,|y|).$$

Peut-on avoir l'égalité ? Si oui, pour quelles valeurs de x et y ?

5 Études de fonctions

Exercice 25 (*)
Dans chaque cas, déterminer le domaine de définition de la fonction et les intervalles de dérivabilité. Puis calculer la dérivée.

1) $f_1 : x \mapsto \sqrt{(1+x)^3}$.
On fera une étude particulière de dérivabilité en -1.
Pour les fonctions qui suivent , on se limitera à l'usage des théorèmes généraux pour justifier la dérivabilité sur le domaine le plus grand possible.

2) $f_2 : x \mapsto \left(\dfrac{2x+1}{4-x}\right)^5$.

3) $f_3 : x \mapsto (1-x)\sqrt{x}$.

4) $f_4 : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x-2}$.

5) $f_5 : x \mapsto x\ln^n(x)$ pour $n \geqslant 1$.

Exercice 26 (***)
Dans chaque cas, déterminer le domaine de définition de la fonction et les intervalles de dérivabilité. Puis calculer la dérivée.
Calculs de difficulté croissante.

1) $f_1 : x \mapsto x^2\sin\left(3x^2+6\right)$.
2) $f_2 : x \mapsto (1+\cos(x))^2$.
3) $f_3 : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\cos(x)}}{\mathrm{e}^{\sin(x)}}$.
4) $f_4 : x \mapsto \sqrt{2x^2-3}$.
5) $f_5 : x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$.
6) $f_6 : x \mapsto \left(\dfrac{3x}{1-x}\right)^3$.
7) $f_7 : x \mapsto \sqrt{x+\sqrt{x}}$.
8) $f_8 : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$.
9) $f_9 : x \mapsto \ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.
10) $f_{10} : x \mapsto \sqrt{2+\cos(x^2)}$.
11) $f_{11} : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.
12) $f_{12} : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x-2}{x-3}}$.

Exercice 27 (**)
Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes au point a, et calculer $f'(a)$ le cas échéant.

1) $f_1 : x \mapsto \sqrt{x^2+3x-10}$ en $a=2$.
2) $f_2 : x \mapsto \dfrac{2x}{|x|+4}$ en $a=0$.
3) $f_3 : x \mapsto x+\sqrt{4-x^2}$ en $a=2$.
4) $f_4 : x \mapsto \sqrt{4x^3-4x^2+x}$ en $a=\frac{1}{2}$.
5) $f_5 : x \mapsto \sqrt{x\sqrt{x}}$ en $a=0$.

Rappel : utiliser la définition de la dérivée à partir de la limite du taux d'accroissement.

Exercice 28 (*)
On considère la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}.$$

1) Donner le domaine de définition de f.
2) Étudier la limite de $f(x)$ en 1 en utilisant un nombre dérivé.
3) Retrouver ce résultat à l'aide de l'expression conjuguée.

Exercice 29 (*)
Déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I indiqué.

1) $f_1 : x \mapsto x^3-5x$ sur $I=\mathbf{R}$.
2) $f_2 : x \mapsto 5x\left(x^2-1\right)^7$ sur $I=\mathbf{R}$.
3) $f_3 : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos^3(x)}$ sur $I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.
4) $f_4 : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$ sur $I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 30 (**)
Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^6}$.
2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+3x}}$.
3) $\displaystyle\int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+3}\,\mathrm{d}x$.
4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{7x^2}{(x^3+2)^2}\,\mathrm{d}x$.
5) $\displaystyle\int_4^9 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\,(1-\sqrt{x})}$.
6) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln(x)}$.