Sommes et produits

1 Sommes

Exercice 1 (*) (Pour commencer)
Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $a \in \mathbf{C}$, calculer les sommes :

1) $\sum\limits_{k=0}^{10} 5$.
2) $\sum\limits_{k=1}^{n} 3^n$.
3) $\sum\limits_{k=n}^{2n} a$.
4) $\sum\limits_{k=0}^{n} 3\left(a^k+1\right)$.
5) $\sum\limits_{k=0}^{n} 3a^{k+1}$.
6) $\sum\limits_{k=-n}^{0} k$.
7) $\sum\limits_{k=-n}^{n} (2k+1)$.
8) $\sum\limits_{k=-5}^{-10} a$.
9) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+2)$.

Exercice 2 (*)
Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $a \in \mathbf{C}$, calculer les sommes :

1) $\sum\limits_{k=-2}^{7} (-1)$.
2) $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ak}$.
3) $\sum\limits_{k=1}^{n} a^{2k+1}$.
4) $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (k+1)^2$.
5) $\sum\limits_{k=1}^{n-1} (-1)^k$.
6) $\sum\limits_{k=-n}^{2n} n^k$.

Exercice 3 (**) (changement d'indice)
Remplacer le ? par sa valeur dans les égalités suivantes :

1) $\sum\limits_{k=1}^{n} (k+1)a_k = \sum\limits_{j=?}^{?} j a_?$.
2) $\sum\limits_{k=2}^{n+3} a_{k-1} = \sum\limits_{j=?}^{?} a_j$.
3) $\sum\limits_{k=1}^{n+1} a_{n-k} = \sum\limits_{j=?}^{?} a_j$.
4) $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k} + \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k+1} = \sum\limits_{k=?}^{?} a_k$.

Exercice 4 (**)
Pour $n \in \mathbf{N}^*$, calculer :

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.
2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right)$.

Exercice 5 (**)
Soit $a \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k a^k$.

1) Calculer S_n lorsque $a = 1$.
2) Lorsque $a \neq 1$, calculer $aS_n - S_n$, en déduire la valeur de S_n.

Exercice 6 (**) (Inégalité classique)
Soit p un nombre entier, $p \geqslant 2$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{p^k} \leqslant \frac{p}{p-1}.$$

2 Sommes doubles

Exercice 7 (*)
Pour $n \in \mathbf{N}^*$, calculer les sommes :

1) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{n} i$.
2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} 2^{i+j}$.
3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \frac{i}{j}$.
4) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{n} (2i+j)$.
5) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(2^i+j\right)$.

Exercice 8 (**)
Pour $n \in \mathbf{N}^*$, calculer les sommes :

1) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij$.
2) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} ij$.
3) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} i+j$.

Exercice 9 (**)
Pour $n \in \mathbf{N}^*$, calculer les sommes :

1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \max(i,j)$.
2) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |i-j|$.

Exercice 10 (***)
Pour $n \geqslant 1$, calculer
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i}{i+j}.$$

3 Produits

Exercice 11 (*)
Pour $a \in \mathbf{C}$ et $n \in \mathbf{N}^*$, calculer les produits suivants :

1) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+3}.$

2) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right).$

3) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}a^k.$

4) $\displaystyle\prod_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{2n}(-1)^k(n-k).$

Exercice 12 (*)
Simplifier en utilisant la notation factorielle :

1) $6\times5\times4\times3.$

2) $\dfrac{10\times9\times8}{7\times6\times5\times4}.$

3) $n(n-1)(2n+2).$

Exercice 13 (**)
Simplifier en utilisant la notation factorielle

1) $(2n)\times(2n-2)\times(2n-4)\times\cdots\times2.$

2) $(2n-1)\times(2n-3)\times(2n-5)\times\cdots\times1.$

Exercice 14 (***)
On définit la suite (u_n) par $(u_0,u_1)\in\mathbf{R}^2$ et
$$\forall n\in\mathbf{N},\ u_{n+2}=-2(n+1)u_n.$$
Exprimer simplement u_n en fonction de n et sans utiliser le signe $\prod$.

4 Coefficients binomiaux

Exercice 15 (*)
Calculer les expressions suivantes :

1) $\dbinom{10}{9}$ 2) $\dbinom{8}{2}$ 3) $\dbinom{21}{21}$ 4) $\dbinom{50}{48}$

Exercice 16 (*)
Pour $(x,y)\in\mathbf{C}^2$, développer *rapidement* à l'aide du triangle de Pascal.

1) $(1+x)^5.$ 2) $(1-x)^6.$ 3) $(x-y)^4.$

Exercice 17 (*)
Calculer les sommes suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{3^k}.$

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^{k+1}.$

3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}3^{k-1}.$

4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-1}{k}3^{2k-1}.$

5) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{3^{k-1}}{2^{2k}}.$

6) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}\frac{2^n(-1)^{k(k+1)}}{3^{2k}}.$

7) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{n-k}}{3^{k+1}}.$

Exercice 18 (*)
Calculer les sommes suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$. 2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$. 3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{1+k}\binom{n}{k}$.

Exercice 19 (**)
Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{1+k}\binom{n}{k}.$$

Exercice 20 (*)
Calculer la double somme :

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{n-i}{n-j}\binom{n}{i}.$$

Exercice 21 (**) (Formule de la gouttière)
Pour tout $(n,p) \in \mathbf{N}^2$, montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Exercice 22 (***)
Pour $n \in \mathbf{N}$, calculer les sommes :

$$S_1 = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n}\binom{n}{2k} \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n}\binom{n}{2k+1}.$$

Exercice 23 (***)
Soit $n \in \mathbf{N}$, calculer

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k}.$$

5 Inégalités

Exercice 24 (*)
Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Exercice 25 (***)

1) Montrer que $\forall x > 0,\ x + \frac{1}{x} \geqslant 2$.
2) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un famille de $\mathbf{R}_+^*$. Montrer que :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right) \geqslant n^2.$$

3) Déterminer les cas d'égalité.

Exercice 26 (***)
Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in [0,1]^n$.
On pose

$$S_n = \prod_{k=1}^{n} x_k \quad \text{et} \quad T_n = \prod_{k=1}^{n}(1-x_k).$$

Montrer que $S_n \leqslant 2^{-n}$ ou $T_n \leqslant 2^{-n}$.