Ensembles

1 Ensembles explicites

Exercice 1 (*)
Déterminer $E = \{x > 0,\ \forall y > 0, x < y\}$.

Exercice 2 (*)
Lister les ensembles

1) $\{x^2,\ x \in \{-1, 0, 1\}\}$.
2) $\{(x, y) \in [\![1, 3]\!]^2\}$.
3) $\{(x, y) \in [\![1, 3]\!] \times [\![-1, 1]\!]\}$.
4) $\{(x, y) \in [\![1, 3]\!] \times \{-1\ ,\ 1\}\}$.
5) $[\![1, 3]\!]^2$.
6) $\{-1, 0\}^3$.

Exercice 3 (*)
Déterminer les ensembles suivants :

1) $\left\{x \in \mathbf{R},\ x = \sqrt{x^2}\right\}$.
2) $\{x \in \mathbf{R},\ \sqrt{x} < 0\}$.
3) $\{x \in \mathbf{R},\ (x + 1)^2 < x\}$.
4) $\{x \in \mathbf{R},\ \mathrm{e}^{x+1} = \mathrm{e}^x + 1\}$.
5) $\{x \in \mathbf{R},\ x^2 < 2^2\}$.
6) $\{x \in \mathbf{R},\ -x^2 < -2\}$.

Exercice 4 (**)
Représenter graphiquement $\{(x,\ y) \in \mathbf{R}^2,\ y \geqslant x \Rightarrow y^2 \geqslant x^2\}$.

Exercice 5 (*)
On définit les ensembles

$$K = [2, 5] \times [-1, 4] \quad \text{et} \quad D = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ y \leqslant x\right\}.$$

1) Représenter dans le plan
   (a) le domaine correspondant aux points $M(x, y)$ pour $(x, y) \in K$.
   (b) le domaine correspondant aux points $M(x, y)$ pour $(x, y) \in D$.
2) L'implication suivante est-elle vraie ?
$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad (x, y) \in K \Rightarrow (x + 1, y - 1) \in D.$$
3) La réciproque est-elle vraie ?
4) Montrer que $K \cap D \neq \emptyset$.

Exercice 6 (**)
Pour tout $m \in \mathbf{R}$, on définit la droite $\mathscr{D}_m$ par l'équation

$$\mathscr{D}_m\ :\ 12mx - 9y = 3m + 6.$$

Montrer que $\displaystyle\bigcap_{m \in \mathbf{R}} \mathscr{D}_m$ est un singleton.

Exercice 7 (**)

1) Pour tout $n \in \mathbf{N}\backslash\{0; 1\}$, on considère l'intervalle de $\mathbf{R}$, $\quad I_n = \left[\frac{1}{n}; 1 - \frac{1}{n}\right]$.
   Déterminer une expression plus simple de l'ensemble $J = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbf{N}\backslash\{0;1\}} I_n$.
2) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on considère l'intervalle de $\mathbf{R}$, $\quad \widetilde{I_n} = \left]1 - \frac{1}{n}; 1 + \frac{1}{n}\right[$.
   Déterminer une expression plus simple de l'ensemble $K = \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} \widetilde{I_n}$.

2 Exercices abstraits

Exercice 8 (*)

1) Donner un exemple d'une intersection d'ensembles non vides, qui est vide.
2) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'union de deux ensembles soit vide.

Exercice 9 (*)
Décrire en extension les ensembles $\mathcal{P}(\{x\})$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{x\}))$.

Exercice 10 (**)

1) Soient deux ensembles A et B, écrire
   $A \setminus B$ à partir des opérations ensemblistes usuelles : $\cap$, $\cup$, $\bar{\cdot}$.
2) Prouver que $A \setminus B = A \iff B \setminus A = B$.

Exercice 11 (**)
Soit un ensemble E, on définit une relation de division sur les parties de E par $A \text{ div } B = A \cup \overline{B}$.
Calculer :

1) $A \text{ div } (B \cap A)$.
2) $A \text{ div } (B \cup A)$.
3) $A \cup (B \text{ div } A)$.
4) $A \cap (B \text{ div } A)$.

Exercice 12 (**)
Soient A et B deux parties de E, on définit la différence symétrique de A et B par

$$A \Delta B = \left(A \cap \bar{B}\right) \cup \left(B \cap \bar{A}\right),$$

en notant $\bar{B} = \complement_E B$ et $\bar{A} = \complement_E A$.

1) Expliquer ce que représente la différence symétrique.

2) Donner $E \Delta \emptyset$, $A \Delta E$, $E \Delta E$.

3) Montrer que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Exercice 13 (***)
A et B sont deux parties non vides de E.
Montrer que

$$\left(\forall X \subset E,\ \forall Y \subset E, \begin{cases} A \cap X = A \cap Y \\ B \cap X = B \cap Y \end{cases} \Rightarrow X = Y\right) \iff A \cup B = E.$$