Fonctions usuelles

Toutes les études de fonction se font **sans calculatrice.**

1 Études qualitatives de fonctions

Exercice 1 (*) (Courbes)
Tracer les fonctions suivantes (sans calculatrice et avec le minimum de calculs) les fonctions suivantes :

1) $x \mapsto \ln(x-1)+2$.
2) $x \mapsto \mathrm{e}^{|x|}$.
3) $x \mapsto \mathrm{Arcsin}\,(\sin x)$.
4) $x \mapsto \dfrac{3x-2}{x-1}$.
5) $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$.

Exercice 2 (*) (Symétries)
Les fonctions suivantes sont-elles paires ? impaires ? périodiques ? de quelle période ? symétriques par rapport à un point ? à un axe ?

1) $x \mapsto \ln(|x|)$.
2) $x \mapsto \frac{1+\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x}$.
3) $x \mapsto \sin\left(x^2\right)$.
4) $x \mapsto \sin\left(\frac{x+1}{2}\right)$.
5) $x \mapsto -x\,\mathrm{e}^{x^2-3}$.
6) $x \mapsto \mathrm{e}^{(x-3)^2+1}$.
7) $x \mapsto -\ln|(x+1)(x+2)|$.
8) $x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+4}$.

Exercice 3 (**)
Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbf{R}$, croissantes.

1) Montrer que $f+g$ est croissante.
2) Si f et g sont positives, que peut-on dire de la monotonie de $f \times g$?
3) Si f et g sont négatives, que peut-on dire de la monotonie de $f \times g$?
4) Dans le cas général, que peut-on dire de la monotonie de $f \times g$?

Exercice 4 (**) (Travailler son intuition)
Tracer (sans calculatrice et avec le minimum de calculs) l'allure des fonctions suivantes. L'objectif n'est pas d'obtenir un tracé précis, mais de s'exercer à « sentir » une expression mathématique.

1) $x \mapsto x\sin x$.
2) $x \mapsto x^2\sin x$.
3) $x \mapsto \exp\left(-\frac{x}{2\pi}\right)\sin x$.

2 Composition

Exercice 5 (*)
On considère les applications

$$f\,:\,x \mapsto x^2+1 \quad \text{et} \quad g\,:\,x \mapsto \ln x.$$

Déterminer les domaines de définition et les expressions de $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 6 (*)
On considère les applications

$$f\,:\,x \mapsto \frac{2x+1}{x-2} \quad \text{et} \quad g\,:\,x \mapsto x^2.$$

1) Donner les ensembles de définition de f et g.
2) Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

3 Images directes et réciproques

Exercice 7 (*)

$$f\,:\,x \mapsto \sqrt{x^2+x-2}.$$

1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2) Déterminer l'image de f, c'est-à-dire $f(\mathscr{D}_f)$.
3) L'application f est-elle injective de $\mathscr{D}_f$ dans $\mathbf{R}$?

Exercice 8 (*)

$$f\,:\,x \mapsto \sqrt{|x-1|}.$$

1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2) Déterminer l'image de f, c'est-à-dire $f(\mathscr{D}_f)$.
3) L'application f est-elle injective de $\mathscr{D}_f$ dans $\mathbf{R}$?

Exercice 9 (**)

$$f\ :\ x \mapsto \frac{4x^2}{2x-1}.$$

1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2) Déterminer $\operatorname{Im}(f) = f(\mathscr{D}_f)$.
3) L'application f est-elle injective de $\mathscr{D}_f$ dans $\mathbf{R}$?
   Est-elle surjective entre ces mêmes ensembles ?

4 Dérivées

Pour les trois exercices suivants, déterminer les domaines de définition et de dérivabilité (avec les théorèmes généraux), et calculer les dérivées.

Exercice 10 (*)

1) $x \mapsto \mathrm{e}^{(x^2)}$.
2) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$.
3) $x \mapsto \mathrm{e}^{2x+1}$.
4) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
5) $x \mapsto \ln|x|$.
6) $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$.

Exercice 11 (**)

1) $x \mapsto \ln\left|x^2-3x+2\right|$.
2) $x \mapsto \sqrt{\tan x}$.
3) $x \mapsto \ln^2(x+1)$.
4) $x \mapsto \operatorname{ch}^2(x)$.
5) $x \mapsto \ln(\operatorname{th}(x))$.
6) $x \mapsto \ln(\operatorname{ch}(x))$.

Exercice 12 (**)

1) $x \mapsto \sin^3(x)$.
2) $x \mapsto \sqrt{\ln(x^2-x+1)}$.
3) $x \mapsto \sqrt{\ln|x^2-x-1|}$.
4) $x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(x^2\right)$.
5) $x \mapsto \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{x}$.
6) $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$.
7) $x \mapsto \dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{\mathrm{e}^{2x+1}+\sqrt{x}}$.
   (ne pas chercher à simplifier)
8) $x \mapsto \ln\left(\operatorname{Arctan}(x^2-2x+1)\right)$.

5 Limites et branches asymptotiques

Exercice 13
Étudier les branches asymptotiques aux bords du domaine de définition.

1) $x \mapsto \sqrt{x^2-2x+4}$.
2) $x \mapsto \sqrt{x^3-2x^2+4}$.
3) $x \mapsto \sqrt{x+4}-\sqrt{x}$.
4) $x \mapsto \sqrt{x+4}-\sqrt{x-2}$.
5) $x \mapsto \sqrt{2x+4}-\sqrt{x-2}$.
6) $x \mapsto \sqrt{x^2+4}-\sqrt{x}$.
7) $x \mapsto \ln\left(x^2+1\right)$.
8) $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2+1}-\mathrm{e}^{x^2}$.
9) $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\ln(x)}$.
10) $x \mapsto \ln\left(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x\right)$.

6 Études complètes

Exercice 14 (*) (baccalauréat 1962)
Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction

$$f : x \mapsto 2\,(1-\cos x)\,\sin^2(x).$$

Exercice 15 (**)
Étude complète de la fonction

$$x \mapsto \frac{\ln x}{x}.$$

Exercice 16 (**)
Études complètes des fonctions de l'exercice 11.
On pourra se passer des calculs des dérivées et raisonner avec les compositions.

Exercice 17 (**)
Étude complète de la fonction

$$x \mapsto \ln\left|x^3+3x^2+3x+2\right|.$$

Exercice 18 (**) (baccalauréat 1962)
Étude complète de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^2+2x-5}{x^2-2x+2}.$$

En déduire le *nombre d'extrémités d'arcs*[1] u solutions de

$$(E)\ :\quad (1-m)\sin^2 u - 2(m+1)\cos u + 3m + 4 = 0.$$

On posera $\cos u = x$ et l'on discutera suivant les valeurs du paramètre m.

[1] Le nombre de $u \in [0,\pi]$ qui sont solution de l'équation.

Exercice 19 (***)
Étude complète de la fonction

$$f\ : x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)}}\right).$$

7 Injectivité-surjectivité

Exercice 20 (**) (applications circulaires réciproques)
En s'aidant des dérivées :

1) Montrer que
$$\forall x \in [-1,1],\ \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2},$$

2) Chercher une expression semblable pour
$$\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{pour } x \neq 0.$$

Exercice 21 (**)
Montrer que la fonction sh réalise une bijection de $\mathbf{R}$ dans un intervalle J à préciser, et donner son application réciproque.

Exercice 22 (***)
Montrer que la fonction ch induit une bijection de $\mathbf{R}_+$ dans un intervalle J à préciser, et donner son application réciproque.

8 Bijectivité

Exercice 23 (*) (Bijection continue)
Soit I une partie de $\mathbf{R}$, $a \leqslant b$ sont deux points de I.
Soit $f : I \to \mathbf{R}$, on suppose que $f(a) \leqslant f(b)$.
Montrer à l'aide de contre-exemples que les hypothèses du théorème de la bijection continue sont *minimales* (on ne peut pas en supprimer).

Exercice 24 (*)
On considère l'application
$$h\ : x\ \mapsto \frac{2x+1}{x+2}.$$

1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_h$ de h.

2) Déterminer $\operatorname{Im}(h) = h(\mathscr{D}_h)$ et montrer que h est bijective de $\mathscr{D}_h$ dans $\operatorname{Im}(h)$.
Donner son application réciproque.

Exercice 25 (*)
Soient
$$f\ :\ \begin{cases} \mathbf{R} & \to \mathbf{R} \\ x & \mapsto \sqrt{x^2+1} - x \end{cases} \quad \text{et} \quad g\ :\ \begin{cases} \mathbf{R}^* & \to \mathbf{R} \\ x & \mapsto \dfrac{1-x^2}{2x}. \end{cases}$$

1) Montrer que la composée $f \circ g$ est bien définie sur $\mathbf{R}^*$ et calculer $(f \circ g)(x)$ pour tout x non nul.
Même question pour $g \circ f$.

2) Que peut-on en conclure ?

Exercice 26 (**)
Pour $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$ avec $c \neq 0$, on définit
$$f\ :\ x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}.$$

1) Donner le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.

2) À quelle(s) condition(s) nécessaires et suffisantes sur (a, b, c, d), l'application est-elle bijective de son domaine de définition sur son image.
Dans ce cas, exprimer son image et l'application réciproque.

Exercice 27 (**)
Pour chaque fonction,

- indiquer le domaine de définition,
- étudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité sur $\mathbf{R}$.

1) $x \mapsto x\,\mathrm{e}^{x^2}$.
2) $x \mapsto x \sin x$.
3) $x \mapsto \mathrm{e}^{\sin x}$.
4) $x \mapsto x\lfloor x \rfloor$.

9 Synthèse et approfondissement

Exercice 28 (**)
Pour $(a,\ b,\ n) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{N}^*$ calculer
$$\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{ch}\ (a+kb).$$

Simplifier l'expression au maximum.

Exercice 29 (**)
On définit les fonctions

$$f\ :\ x \mapsto (2x-1)^2 \quad \text{et} \quad g\ :\ x \mapsto \sup_{x \leqslant t \leqslant x+1} f(t).$$

Étudier g.

Exercice 30 (***)
Montrer que $\forall x \in \,]0,\,1[\,,\ x^x\,(1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2}$.

Exercice 31 (***)

1) Discuter, suivant la valeur de $a \in \mathbf{R}$ du nombre de solutions de l'équation

$$(E_a) \quad x^a = \ln(x).$$

2) Tracer dans un même repère la courbe représentative de $x \mapsto \ln x$ et celle de la fonction $x \mapsto x^{a_0}$ où a_0 est l'unique réel strictement positif tel que l'ensemble des solutions de E_{a_0} soit un singleton.

Exercice 32 (***)
Pour $0 < a \leqslant b,$ on considère la fonction

$$f\ :x \mapsto \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}.$$

Étudier la monotonie de f sur $\mathbf{R}_+^*$.
En déduire que

$$\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \leqslant (\ln 2)^2\,.$$