Primitives

1 Pour commencer

Exercice 1 (*)
Préciser à chaque fois si F est une primitive de f.

1) $F(x) = x^2 - 5x + 3$ et $f(x) = x - 5$.
2) $F(x) = x^x$ et $f(x) = (\ln(x) + 1)\, x^x$.
3) $F(x) = \text{Arctan}\,(x)$ et $f(x) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{\pi}{2}$.

Exercice 2 (*)
Trouver les primitives à valeurs dans $\mathbf{R}$ de chacune des fonctions suivantes :

1) $t \mapsto \mathrm{e}^{3t}$.
2) $t \mapsto \sin\left(\frac{t}{5}\right)$.
3) $t \mapsto t^5 + 2t^3 - t - 1$
4) $t \mapsto (t-1)(t+1)$.
5) $t \mapsto \cos^2(t) + \sin^2(t)$.
6) $t \mapsto \cos^2(t) - \sin^2(t)$.
7) $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$.
8) $t \mapsto \ln(t+1)$.
9) $t \mapsto t(t^2+1)^n$.
10) $t \mapsto \dfrac{\cos\left(\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}}$.

Exercice 3 (*)
Donner une primitive à valeurs dans $\mathbf{R}$ de :

1) $t \mapsto \tan t$.
2) $t \mapsto \dfrac{t+2}{t^2+4t}$.
3) $t \mapsto \dfrac{t+2}{\sqrt{t^2+4t}}$.
4) $t \mapsto te^{5t^2}$.
5) $t \mapsto \sin(t)\cos(t)$.
6) $t \mapsto \dfrac{t}{t^2-5}$.
7) $t \mapsto \text{th}\,(t)$.
8) $t \mapsto \tan^2(t)$.
9) $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{\cos^3(t)}$.

Exercice 4 (**)
Donner une primitive à valeurs dans $\mathbf{R}$ de :

1) $t \mapsto \dfrac{\ln^4(t)}{t}$.
2) $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$.
3) $t \mapsto \dfrac{1}{\cos^2(t)\sqrt{\tan(t)}}$.

Exercice 5 (***)
Donner une primitive à valeurs dans $\mathbf{R}$ de :

1) $t \mapsto \dfrac{\ln(t)-1}{t^2}$.
2) $t \mapsto \dfrac{1}{t+\sqrt{t}}$.
3) $t \mapsto \mathrm{e}^t\left(\dfrac{1}{t} + \ln(t)\right)$.

Exercice 6 (**)
Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\sin(x)}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

2 Intégration par parties

Exercice 7 (*)
Calculer

1) $\displaystyle\int_0^x t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.
2) $\displaystyle\int_1^e t^2\ln(t)\,\mathrm{d}t$.
3) $\displaystyle\int_0^1 \text{Arctan}\,(t)\,\mathrm{d}t$.
4) $\displaystyle\int_0^\pi t\cos t\,\mathrm{d}t$.

3 Changement de variable

Exercice 8 (*)
En s'aidant à chaque fois d'un changement de variable, calculer les intégrales suivantes.

1) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^x \frac{\ln(\ln t)}{t}\,\mathrm{d}t$.
2) $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^t\cos(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 9 (**)
Calculer

1) $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\text{ch}\,t}\,\mathrm{d}t$.
2) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^x \frac{\ln(t)\,\mathrm{d}t}{t+t\,(\ln(t))^2}$.
3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4(t)\,\mathrm{d}t$.
4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\sin(t)}\,\mathrm{d}t$.

4 Fonctions circulaires

Exercice 10 (**)
Calculer

1) $\displaystyle\int_0^x \cos^3(t)\sin^2(t)\,\mathrm{d}t$.
2) $\displaystyle\int_0^x \cos^3(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$.
3) $\displaystyle\int_0^x \cos^3(t)\sin^4(2t)\,\mathrm{d}t$.

5 Fonctions rationnelles

Exercice 11 (*)
Trouver une primitive pour chacune des fonctions suivantes en indiquant le domaine de validité.

1) $t \mapsto \dfrac{1}{2t^2+5t+2}$.

2) $t \mapsto \dfrac{1}{4t^2-4t+1}$.

3) $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+4t+4}$.

4) $t \mapsto \dfrac{t}{t^4+2t^2+3}$.

Exercice 12 (**)
Trouver une primitive pour chacune des fonctions suivantes en indiquant le domaine de validité.

1) $t \mapsto \dfrac{1}{1+\cos(t)}$.

2) $t \mapsto \dfrac{1}{2+\cos(t)}$.

3) $t \mapsto \dfrac{\cos(t)-1}{\cos(t)+1}$.

Exercice 13 (**)
Trouver une primitive pour chacune des fonctions suivantes en indiquant le domaine de validité.

1) $t \mapsto \dfrac{\text{th}\,(t)}{1+\text{th}\,(t)}$.

2) $t \mapsto \dfrac{1}{\text{ch}\,(t)+1}$.

6 Entraînement

Exercice 14 (**)
Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables et calculer leur dérivée.

1) $x \mapsto \displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$.

2) $x \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} x\cos^5(tx)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 15 (**)
Calculer

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \text{Arcsin}\,(t)\,\mathrm{d}t$

2) $\displaystyle\int_0^1 t\,\text{Arctan}\,(t)\,\mathrm{d}t$.

3) $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^t\cos(t)\,\mathrm{d}t$.

4) $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{2t}\cos\left(\mathrm{e}^t\right)\,\mathrm{d}t$.

5) $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

6) $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 16 (**)

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\sin(t)+\cos(t)}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad C=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\sin(t)+\cos(t)}\,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que $C=S$ grâce à un changement de variables.

2) Que vaut $C+S$. En déduire les valeurs de C et de S.

3) En déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{1-t^2}}$.

Exercice 17 (**)
En s'aidant d'une formule de récurrence, calculer

$$u_n=\int_0^x t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{où } n\in\mathbf{N}.$$

On donnera l'expression sous forme de somme.

Exercice 18 (**)
Calculer

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \tan\left(\frac{u}{2}\right)\ln\left(1+\cos(u)\right)\,\mathrm{d}u.$$

Exercice 19 (***)
Trouver une primive de $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{3+\sin(2t)}$.

Exercice 20 (***)
Pour $x\in\mathbf{R}$, calculer

$$\int_0^{\sin^2(x)} \text{Arcsin}\left(\sqrt{t}\right)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\cos^2(x)} \text{Arccos}\left(\sqrt{t}\right)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 21 (***) (Intégrales de Wallis)
Pour tout $n\in\mathbf{N}$, on note $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1) À l'aide de l'intégration par parties, trouver une relation entre I_n et I_{n+2}.

2) Exprimer I_n en fonction de n en distinguant les cas n pair et n impair.

3) Pour tout $n\in\mathbf{N}$, on note $J_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.
À l'aide d'un changement de variable, montrer que $I_n=J_n$ pour tout $n\in\mathbf{N}$.