Équations différentielles linéaires

1 Équations d'ordre 1

Exercice 1 (*)
Résoudre :

1) $2y' = 1$ avec $y(0) = 2$
2) $2y' = a - y$ avec $a \in \mathbf{K}$ et $y(0) = -1$
3) $y'' = 4y' + 1$ avec $y(0) = 1$ et $y'(1) = 1$

Exercice 2 (*)
Résoudre :

1) $y' = -\tan(x)y + \dfrac{1}{\cos(x)}$ sur $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$.
2) $y' = \tan(x)y + \dfrac{1}{\cos(x)}$ sur $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 3 (*)
Résoudre :

1) $4y' - 3y = 0$.
2) $y' + \dfrac{1}{1+t^2}\, y = 0$.
3) $y' = \dfrac{2}{1-t^2}\, y$.
4) $y' = t(y+2)$.
5) $y' - 3y = \mathrm{e}^{3x} + 2x\,\mathrm{e}^{x}$.
6) $y' = y + t$ avec $y(0) = 1$.
7) $y' = (1+t)\, y$.
8) $y' + 2ty = t$ avec $y(0) = 1$.
9) $y' + 2y = (t-2)^2$.
10) $y' = \cos t + y$.
11) $4y' + y = \cos(t)$ et $y(0) = 0$.
12) $y' - y = \operatorname{sh} t$ et $y(0) = 1$.

2 Équations d'ordre 2

Exercice 4 (*)
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y'' + y' - 2y = 1$ avec $y(0) = y'(0) = 0$.
2) $y'' - 4y' + 4y = 4$ avec $y(0) = y'(0) = 1$.
3) $y'' + y' + \frac{y}{2} = 1$ avec $y(0) = y'(0) = 0$
4) $y'' - 2y' + y = 1$ avec $y(0) = y'(0) = 1$.
5) $y'' - 2y' = 1$ avec $y(0) = y'(0) = 1$.
6) $y'' = 1$ avec $y(0) = y'(0) = 1$.
7) $y'' = -y$ avec $y(0) = y'(0) = 1$.

Exercice 5
Résoudre dans $\mathbf{R}$ les équations suivantes :

1) $y'' + y' + y = \cos(2x)$.
2) $y'' + y = \cos(x)$.
3) $y'' + 4y = \sin(2x)$.
4) $y'' + y' - 2y = x\,\mathrm{e}^{-2x}$.
5) $y'' - 4y' + 4y = (x^3 + x)\,\mathrm{e}^{2x}$.

Exercice 6 (**)
Pour quelles valeurs des réels a et b, chaque solution sur $\mathbf{R}$ de l'équation

$$y'' + ay' + by = 0$$

s'annule-t-elle en une infinité de points ?

Exercice 7 (*)
Soit $\omega_0 \geqslant 0$. Résoudre suivant les valeurs de ω :

$$y'' + \omega_0^2 y = \cos(\omega t).$$

3 Changement d'inconnue ou de variable

Exercice 8 (*)
Résoudre l'équation différentielle $y' = y \ln y$. *On pourra poser* $y(t) = \mathrm{e}^{z(t)}$.

Exercice 9 (*)
Résoudre sur $]0, +\infty[$, l'équation différentielle :

$$(E) \qquad x^2y'' + 4xy' - (x^2 - 2)y = 0\,.$$

On pourra poser z tel que : $\forall x > 0,\ z(x) = x^2 y(x)$.

Exercice 10 (**)
Résoudre l'équation différentielle sur $\mathbf{R}_+^*$

$$(E) \qquad x^2y'' + 4xy' - 2y = 0.$$

avec le changement de variable $x = \mathrm{e}^t$.

Exercice 11 (***)
Trouver un changement de variable $x = g(t)$ qui transforme cette équation en équation différentielle linéaire à coefficients constants. Puis résoudre. (a est constant)

$$(1 + x^2)^2y'' + 2x(1 + x^2)y' + a^2y = 0.$$

4 Retrouver l'équation différentielle

Exercice 12 (**)
Trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbf{R}_+$ telles que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \qquad \int_0^x (2x - 3t)f(t)\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}.$$

Exercice 13 (**)
Trouver toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telles que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad f'(x) + f(-x) = -2(x + 1)\,\mathrm{e}^x.$$

Exercice 14 (***)
Déterminer toutes les fonctions dérivables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x + y) = f(x)f(y).$$

5 Entraînement

Exercice 15 (**) (La baignoire percée)
On considère une baignoire de forme parallélépipédique dont la base est de dimensions $a \times b$ que l'on remplit avec un débit constant noté d.
On note $z(t)$ la hauteur d'eau dans la baignoire à l'instant t et $V(t)$ son volume. *On suppose que* $V(0) = 0$.
La baignoire a une fissure au fond qui laisse s'échapper plus ou moins d'eau en fonction de la pression exercée par l'eau sur celle-ci. On rappelle que la pression au fond de la baignoire est égale à $p(z) = \rho g z$ (on ne compte pas la pression atmosphérique qui s'équilibre de part et d'autre de la fissure).
Le débit de la fuite est $d_f = \alpha p$ avec $\alpha > 0$ une constante, et p la pression qui s'y exerce. Toutes les grandeurs sont en unité SI.

1) Si on suppose la baignoire suffisamment haute, montrer que le volume d'eau tend vers un volume à l'équilibre V_{eq} que l'on déterminera.

   On pourra introduire la notation T pour le temps caractéristique du système.

2) Si la baignoire a un volume V (que l'on suppose inférieur au volume d'équilibre), au bout de combien de temps sera-t-elle pleine ?

Exercice 16 (**)
Trouver toutes les fonctions $f\ : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dérivables sur $\mathbf{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad f'(x) = f(-x).$$

Exercice 17 (**)
Trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbf{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad 2f(x) = 3x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 18 (***)
Résoudre l'équation différentielle $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$.

Exercice 19 (***)
Trouver toutes les fonctions $f\ : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continues sur $\mathbf{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \qquad f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 20 (***)

1) Déterminer toutes les solutions $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de l'équation :

$$(E) \quad xy' - 3y = 0.$$

2) Résoudre les équations suivantes sur $\mathbf{R}$ (tout entier) :

$$(E_1) \quad xy' - 2y = x \quad \text{et} \quad (E_2) \quad xy' + 2y = x.$$

3) Soit l'équation $(E) \quad xy' - 2|y| = x$.

   (a) Montrer que (E) n'a pas de solution sur $\mathbf{R}$.

   (b) Donner et tracer les solutions de (E), définies sur $\mathbf{R}_+^*$.

6 CCINP

Exercice 21 (Exercice 42 CCINP)
On considère les équations différentielles suivantes :

$$(H)\ :\ 2xy' - 3y = 0 \quad \text{et} \quad (E)\ :\ 2xy' - 3y = \sqrt{x}.$$

1) Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

2) Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

3) L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?