Suites numériques - relations de comparaison

On ne s'intéresse pas encore aux suites définies implicitement.

1 Pour commencer...

Exercice 1
Classer les suites, dont les termes généraux sont les suivants, par ordre de négligeabilité :

1) $\frac{1}{n},\ \frac{1}{n^2},\ \frac{\ln n}{n},\ \frac{\ln n}{n^2},\ \frac{1}{n\ln n}$ 2) $n,\ n^2,\ n\ln n,\ \sqrt{n}\ln n,\ \frac{n^2}{\ln n}$

Exercice 2 (Vrai-Faux)
Dire pour chaque proposition si elle est vraie ou fausse. Le démontrer.

1) Si $u_n \sim v_n$ alors pour toute application f définie sur $\mathbf{R}$, $f(u_n) \sim f(v_n)$,
2) Si $u_n = o(n)$ et $v_n = o(n)$, alors $(u_n - v_n) = o(0)$,
3) Si $u_n \sim \frac{1}{n}$ alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang,
4) Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n - v_n$ tend vers 0,
5) Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ et si (v_n) ne s'annule pas alors $u_n \sim v_n$.

Exercice 3 (*)
Montrer que $n! = o\left(n^n\right)$ de deux façons différentes.

Exercice 4 (*) (à connaître)
Calculer

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m,\ \lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n.$$

Exercice 5 (**) (passage au logarithme)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites strictement positives telles que $u_n \sim v_n$.

1) Montrer que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in [0,\,1[\cup]1,\,+\infty[\cup\{+\infty\}$, alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.
2) Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, trouver un exemple pour lequel l'équivalent ne passe pas au logarithme.

2 Calculs

Exercice 6 (*)
Donner la nature de la suite, et sa limite éventuelle

1) $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = \frac{(-2)^n}{n^2}$. 2) $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = \frac{\ln n}{n}$.

Exercice 7 (*)
Donner un équivalent simple :

1) $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$.
2) $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = \frac{3n^2-2n+1}{n\sqrt{n}+n-1}$.
3) $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = \frac{3n^2-2n+1}{n^6-2n^4-9}$.
4) $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = \frac{n^3+5n}{5n^3+\cos(n)+\frac{1}{n^2}}$.
5) $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \sqrt{1+n^2}-\sqrt{1+n}$.
6) $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = \sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}$.
7) $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = \frac{\sqrt{(n+1)(n+3)}+\sqrt{n}}{n}$.
8) $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = n-\sqrt{(n+1)(n+3)}-\sqrt{n}$.

Exercice 8 (*)
Trouver un équivalent simple et la limite éventuelle :

1) $u_n = \frac{2n^2+n\ln^2 n}{n^2\ln n+\sqrt{n}}$. 2) $u_n = \frac{n+\mathrm{e}^n}{2^n+3^n}$. 3) $u_n = \mathrm{e}^n + n^{\mathrm{e}}$.

Exercice 9 (**)
Trouver un équivalent simple et la limite éventuelle :

1) $u_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$.
2) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
3) $u_n = \sqrt[3]{n^3+1} - n$.
4) $u_n = \sqrt{n+\sqrt{n+1}} - \sqrt{n-\sqrt{n+1}}$.
5) $u_n = \dfrac{\ln(n+1) - \ln n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$.
6) $u_n = (n+1)^{n+1} - n^n$.

Exercice 10 (*)
Trouver un équivalent simple :

1) $u_n = \sin \dfrac{1}{n} - \tan \dfrac{1}{n}$.
2) $u_n = \dfrac{\sin \frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$.

Exercice 11 (**)
Soit $k \in \mathbf{N}^*$ et $x \in]0,1[$ fixés.

1) Montrer que $\dbinom{n}{k} \sim \dfrac{n^k}{k!}$
2) En déduire que la suite $\left(\dbinom{n}{k} x^n\right)_{n \in \mathbf{N}^*}$ admet une limite quand $n \to +\infty$, et donner la valeur de cette limite.

3 Entraînement

Exercice 12 (**)
Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} k! \sim n!\,.$$

Exercice 13 (**)
Soit (u_n) une suite décroissante telle que

$$u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}.$$

1) Montrer que (u_n) converge vers 0^+.
2) Donner un équivalent simple de u_n en $+\infty$.
3) Montrer à l'aide d'un contre-exemple que si (u_n) n'est pas supposée décroissante, mais positive convergente vers 0, alors l'équivalent simple trouvé précédemment n'est pas toujours valable.

Exercice 14 (***)
Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = u_n\, e^{-u_n}.$$

1) Montrer que (u_n) converge vers 0.
2) Montrer que $u_{n+1} = u_n - u_n^2 + o(u_n^2)$.
3) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} = -1$.
4) En déduire[1] que $u_n \sim \frac{1}{n}$.

[1] Penser à Césaro.