Dénombrement

De nombreux petits exercices interactifs permettent de s'entraîner sur le site internet.

1 Pour commencer

Exercice 1 (*)
Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot

1) BONHEUR 2) TRAVAIL 3) ANAGRAMME

Exercice 2 (*)
Une urne contient 5 boules numérotées.
Combien y-a-t-il de tirages possibles dans chaque situation :

1) on tire 3 boules simultanément,
2) on tire 3 boules successivement avec remise,
3) on tire 3 boules successivement sans remise.

Exercice 3 (**) (méthode)
L'alphabet est composé de 6 voyelles et 20 consonnes.

1) Déterminer le nombre de mots distincts composés de 3 consonnes et 2 voyelles.
2) Faire de même en excluant les mots qui renferment 3 consonnes côte à côte.

Exercice 4 (*)
Combien utilise-t-on de chiffres 1 pour compter de 1 à 10 000 ?

Exercice 5 (**)
Soit $b \geqslant 2$. Combien faut-il de caractères pour écrire 10 000 en base b ?
Par exemple, il en faut 5 *en base* 10.

2 Au plus, au moins...

Exercice 6 (*)
Combien y-a-t-il de nombres à 5 chiffres (on ne met pas de 0 en premier chiffre)

1) au total
2) où 0 ne figure jamais.
3) où 0 figure une et une seule fois.
4) où 0 figure au plus une fois.
5) où 0 figure au moins une fois.

Exercice 7 (**)
Soit un jeu de 52 cartes, dont on tire 5 cartes. Dénombrer les mains

1) au total.
2) comprenant exactement un as.
3) comprenant au moins un valet.
4) comprenant (à la fois) au moins un roi et au moins une dame.

3 Injections

Exercice 8 (**) (méthode)
Un magasin propose des billes de 5 couleurs différentes. Donner le nombre de façons de remplir un sac avec 20 billes.
Méthode :
On choisit un ordre pour les 5 couleurs : $RBVOJ$.
On écrit les couleurs des billes les unes à la suite des autres, rassemblées par couleur suivant l'ordre prédéfini et on sépare chaque couleur d'une autre par un trait.
Par exemple $RR-BBBBBB-V--JJJJJJJJJJJ$ (ici, la couleur O n'a jamais été choisie). On compte le nombre d'écritures possibles.

Exercice 9 (**)
Pour $n \in \mathbf{N}$ fixé, donner le nombre de solutions de l'équation $(x,y,z,t) \in \mathbf{N}^4$ de $x+y+z+t=n$.

Exercice 10 (***)
Soient $(n,p) \in (\mathbf{N}^*)^2$, avec $p \leqslant n$.

1) Donner le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.
2) Donner le nombre d'applications croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.

4 Parties d'un ensemble

Exercice 11 (**)
Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note P_n le nombre maximum de régions en lesquelles on peut séparer le plan avec n droites distinctes.

1) Donner une relation de récurrence linéaire (à coefficients non constants) vérifiée par la suite (P_n). *On ne demande pas la justification formelle pour obtenir géométriquement le bon nombre de régions.*
2) Donner la valeur de P_n pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Exercice 12 (***)

1) Si $\text{Card}\,(E) = n$, combien peut-on définir de relations binaires sur E ?

2) Parmi celles-ci, combien sont

   (a) Réflexives ?

   (b) Symétriques ?

   (c) Réflexives et symétriques ?

Exercice 13 (***)
Soit E un ensemble fini de cardinal n.

1) Combien existe-t-il de couples (A, B) formant une partition de E en deux parties ?

2) Combien existe-t-il de couples (A, B) formant un recouvrements de E en deux parties (ie de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)$ tels que $A \cup B = E$) ?

Exercice 14 (***) (calculatoire)
Soit E un ensemble de cardinal n. Calculer

1) $\displaystyle\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \text{Card}\, X.$

2) $\displaystyle\sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \text{Card}\,(X \cap Y).$

3) $\displaystyle\sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \text{Card}\,(X \cup Y).$

5 Entraînement

Exercice 15 (**)
Soit un tableau de 9 cases de long par 4 cases de haut. On se déplace le long des arêtes uniquement vers le bas ou vers la droite.

1) Combien y a-t-il de chemins possibles pour aller du coin en haut à gauche au coin en bas à droite.

2) Si on place un point C sur le quadrillage, combien de ces chemins passent par C ?

3) Retrouver la formule de Vandermonde :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.$$

Exercice 16 (**)
Dans le développement de $(a + b + c)^{2000}$,

1) quel est le coefficient devant $a^{1000}b^{999}c^2$?

2) quel est le coefficient devant $a^{1981}b^{18}c^3$?

Exercice 17 (***)
De combien de façons peut-on payer 100€ avec des pièces de 10, 20 et 50 centimes.

Exercice 18 (***)

1) Soient A, B, C trois ensembles finis.
   Déterminer une formule du crible pour $\text{Card}\,(A \cup B \cup C)$.

2) Pour $(A_i)_{i \in [\![1,\, n]\!]}$, n ensembles finis.
   Déterminer *la* formule du crible pour $\text{Card}\left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$. On pourra faire intervenir la notation $I_k(n)$ pour désigner l'ensemble des parties à k éléments de $[\![1,\, n]\!]$.
   On pourra la démontrer par récurrence.

3) Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $\sigma(n)$ les permutations de $[\![1,\, n]\!]$.
   Un dérangement de $[\![1,\, n]\!]$ est une permutation $s \in \sigma(n)$ sans point fixe, c'est-à-dire telle que $\forall i \in [\![1,\, n]\!]$, $s(i) \neq i$.
   On note D_n l'ensemble des dérangements de $[\![1,\, n]\!]$ et $d_n = \text{Card}\, D_n$.
   Par convention, on pose $d_0 = 1$.

   (a) Calculer d_1, d_2.

   (b) Montrer que $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$.

   (c) En considérant le complémentaire de D_n dans $\sigma(n)$, montrer que

$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

6 Exercices CCINP

Exercice 19 (CCINP 112)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.
On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1) Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.

2) Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.

3) Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.