Structures algébriques

1 Groupes et sous-groupes

Exercice 1 (*)
Soit G un groupe. On considère (G_i) une famille de sous-groupes de G.
Montrer que $\bigcap_{i\in I} G_i$ est un sous-groupe de G.

Exercice 2 (*)
Soit X un ensemble non vide, et $x \in X$.
Montrer que $\mathrm{Fix}(x) = \{\sigma \in S_X,\, \sigma(x) = x\}$ est un sous-groupe de S_X.

Exercice 3 (**)
Montrer que $\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} \mathbf{U}_n,\, \times\right)$ est un groupe.

Exercice 4 (**)
Soit G un groupe (multiplicatif).
On note $Z(G) = \{x \in G,\, \forall g \in G,\, gx = xg\}$.
Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.

Exercice 5 (**)

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n\mathbf{Z} = \{nk,\, k \in \mathbf{Z}\}$ est un sous-groupe de $\mathbf{Z}$.
2) Montrer que tout sous-groupe de $\mathbf{Z}$ est de la forme $n\mathbf{Z}$ pour un certain $n \in \mathbf{N}$.
3) Montrer que pour $(d,\, d') \in \mathbf{N}^2$,
$$d|d' \iff d'\mathbf{Z} \subset d\mathbf{Z}.$$
4) (a) Montrer que pour tout $(a,\, b) \in \mathbf{Z}^2$,
$$a\mathbf{Z} + b\mathbf{Z} = \left\{ak + bk',\, (k,\, k') \in \mathbf{Z}^2\right\}.$$
est un sous-groupe de $\mathbf{Z}$.
   (b) En déduire qu'il existe $d \in \mathbf{N}$ tel que $a\mathbf{Z} + b\mathbf{Z} = d\mathbf{Z}$.
   (c) Montrer que si $(a,\, b) \neq (0,\, 0)$, $d = a \wedge b$.
5) Montrer que pour tout $(a,\, b) \in (\mathbf{Z}^*)^2$, il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $m\mathbf{Z} = a\mathbf{Z} \cap b\mathbf{Z}$.
Montrer que $m = a \vee b$.

Exercice 6 (**)
Soit G un groupe mutliplicatif de cardinal pair et d'élément neutre e.

1) Montrer que la relation définie par
$$\forall (x,\, y) \in G^2,\, x\mathscr{R}y \iff \left(x = y \text{ ou } x = y^{-1}\right)$$
définit une relation d'équivalence sur G.
2) Montrer qu'il existe au moins un élément $x \in G$ et différent de l'élément neutre tel que $x^2 = e$.
On dit que x est d'ordre 2.

Exercice 7 (***)
Soit G un ensemble fini non vide muni d'une loi $\star$ interne et associative.
On suppose que tous les éléments de G sont réguliers.
Montrer que G est un groupe.

Exercice 8 (**)
Pour $(x,\, y) \in \mathbf{R}^2$, on pose
$$x \star y = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}.$$

1) Montrer que $\sqrt{1+(x\star y)^2} = \sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2} + xy$.
2) Montrer que $(\mathbf{R},\, \star)$ est un groupe.
3) Montrer que sh réalise un isomorphisme de $(\mathbf{R},\, +)$ sur $(\mathbf{R},\, \star)$.

Exercice 9 (***)
Soit E un ensemble non vide muni d'une loi $\star$ interne, associative et possédant un élément neutre e.
Soit $a \in E$ et $f : \left\{\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & a\star x. \end{array}\right.$
Montrer que a admet un symétrique dans E si, et seulement si f est bijective.

Exercice 10 (**)
Soit φ un morphisme d'un groupe fini $(G, \star)$ vers $(\mathbf{C}^*, \times)$.
On suppose que φ n'est pas une application constante. Calculer
$$u = \sum_{x\in G} \varphi(x).$$

Exercice 11 (* *) (Théorème du rang)**
Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes, avec G groupe fini.
Montrer que
$$|\ker f|\,|\operatorname{Im} f| = |G|.$$
$|F|$ désigne le cardinal de l'ensemble F, c'est-à-dire son nombre d'éléments.

2 Anneaux-corps

Exercice 12 (*)

1) Montrer que tout sous-anneau de $(\mathbf{R}, +, \times)$ contient $\mathbf{Z}$.
2) Montrer que tout sous-corps de $(\mathbf{R}, +, \times)$ contient $\mathbf{Q}$.
3) Déterminer les sous-corps de $(\mathbf{Q}, +, \times)$.

Exercice 13 (**)
On note $\mathbf{Z}[i] = \left\{a + ib,\ (a, b) \in \mathbf{Z}^2\right\}$ l'ensemble des *entiers de Gauss.*

1) Montrer que $\mathbf{Z}[i]$ est un sous-anneau de $\mathbf{C}$.
2) Déterminer les inversibles de $\mathbf{Z}[i]$.
   On pourra s'aider du module.
3) Un entier de Gauss a est irréductible si pour tout $(b, c) \in (\mathbf{Z}[i])^2$,
$$a = bc \Rightarrow b \text{ ou } c \text{ inversible.}$$
   2 est-il irréductible ?

Exercice 14 (**)
Déterminer tous les endomorphismes d'anneau de $\mathbf{Q}$.

Exercice 15 (**)
On note $\mathbf{Q}[\sqrt{2}] = \left\{a + b\sqrt{2},\ (a, b) \in \mathbf{Q}^2\right\}$.

1) Montrer que $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ est un corps.
2) Déterminer tous les endomorphismes d'anneau de $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$.

Exercice 16 (***)
Soit A un anneau.
$x \in A$ est dit nilpotent, s'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $x^n = 0$.

1) Déterminer les éléments nilpotents d'un anneau intègre.
2) Montrer que si $x \in A$ est nilpotent, alors $-x$ aussi.
3) Pour $(x, y) \in A^2$, montrer que si xy est nilpotent alors yx l'est aussi.
4) Pour $(x, y) \in A^2$ deux éléments nilpotents qui commutent.
   Montrer que $(x + y)$ est aussi nilpotent.
5) Soit $x \in A$ nilpotent.
   Montrer que $1 - x$ est inversible, et calculer son inverse.

Exercice 17 (***) (Froebenius)
Soit A un anneau commutatif.

1) Montrer qu'il existe un unique morphisme d'anneaux $\phi : \mathbf{Z} \to A$.
2) Montrer que $\ker(\phi)$ est soit réduit à $\{0\}$, soit de la forme $n\mathbf{Z}$ avec $n \in \mathbf{N}$.
   On appelle n la caractéristique de l'anneau A.
3) Soit A de caractéristique p avec p un nombre premier.
   Montrer que $a \mapsto a^p$ définit un endomorphisme d'anneaux.