

# ESPACES VECTORIELS

## 1 ESPACES VECTORIELS

### Exercice 1 (\*)

Dire à chaque fois s'il s'agit d'un espace vectoriel, puis le démontrer.

- 1)  $\{(x, y) \in \mathbf{R}_+^2, \text{ tel que } x = y\}$ .
- 2)  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2, \text{ tel que } 2x - 5y - 1 = 0\}$ .
- 3)  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2, \text{ tel que } 2xy = 0, x + y = 0\}$ .
- 4)  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2, \text{ tel que } (x - 1)y = 0\}$ .
- 5)  $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \text{ tel que } x + y + z = 0, x - y + z = 0\}$ .
- 6)  $\{(x, 2x, 3x)\}_{x \in \mathbf{K}}$ .
- 7)  $\{(x, y, z), \text{ tel que } \exists m \in \mathbf{R}, x = m(y + z)\}$ .
- 8) Le disque unité de  $\mathbf{R}^2$ .
- 9) L'axe des abscisses de  $\mathbf{R}^2$ .
- 10) Les deux axes (abscisses et ordonnées) de  $\mathbf{R}^2$ .

### Exercice 2 (\*)

Dire à chaque fois s'il s'agit d'un espace vectoriel, puis le démontrer.

- 1) Pour  $P \in \mathbf{R}[X]$  fixé, les racines réelles de  $P$ .
- 2)  $\{P \in \mathbf{K}[X], \text{ tel que } P(0) = 0\}$ .
- 3)  $\{P \in \mathbf{K}_n[X], \text{ tel que } P(0) = 1\}$ .
- 4)  $\{P \in \mathbf{K}_n[X], \text{ tel que } P(0) = 0 \text{ ou } P(1) = 0\}$ .
- 5)  $\{P \in \mathbf{K}_n[X], \text{ tel que } P(0) = 0 \text{ et } P(1) = 0\}$ .
- 6)  $\{P \in \mathbf{K}_n[X], \text{ tel que } P(0) = 1 \text{ et } P(1) = 0\}$ .
- 7)  $\{P \in \mathbf{K}_n[X], \text{ tel que } P \text{ est scindé}\}$ .
- 8)  $\{P \in \mathbf{K}[X], \text{ tel que } \deg P \geq 3\}$ .

### Exercice 3 (\*)

Dire à chaque fois s'il s'agit d'un espace vectoriel, puis le démontrer.

- 1) Pour  $n \geq 1$ , l'ensemble des matrices triangulaires supérieures réelles d'ordre  $n$ .
- 2) Pour  $n \geq 1$ , l'ensemble des matrices triangulaires supérieures réelles d'ordre  $n$  à coefficients strictement positifs.
- 3) L'ensemble des suites qui convergent.
- 4) L'ensemble des suites qui divergent.
- 5) Pour  $T > 0$  fixé, l'ensemble des fonctions  $T$ -périodiques.
- 6) Pour  $I$  un intervalle donné et  $k \in \mathbf{N}$ , l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$ .

### Exercice 4 (\*\*)

Soient  $E = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ ,

$F$  l'ensemble des applications croissantes sur  $\mathbf{R}$ ,  
et  $G$  l'ensemble des applications décroissantes sur  $\mathbf{R}$ .

- 1)  $F$  et  $G$  sont-ils tous deux des sous-espaces vectoriels de  $E$  ?
- 2) L'ensemble des applications qui sont sommes d'une application croissante et d'une application décroissante est-il un sous-espace vectoriel de  $E$  ?

### Exercice 5 (\*\*)

L'ensemble

$$\{(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}, (u_n^2) \text{ converge}\}$$

est-il un sous espace vectoriel de  $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$  ?

## 2 ESPACES ENGENDRÉS

### Exercice 6 (\*)

Soit  $e_1 = (1, -1, 1, 2)$  et  $e_2 = (-1, 2, 3, 1)$ .

À quelles conditions sur  $(x, y) \in \mathbf{K}^2$ , le vecteur  $u = (-2, x, y, 3)$  appartient-il à  $\text{Vect}(e_1, e_2)$  ?

### Exercice 7 (\*\*)

- 1)  $(4, 5, 1)$  est-il une combinaison linéaire de  $(2, 3, 0)$  et  $(1, 1, 0)$  ?
- 2) Décrire le  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel engendré par  $(0, 1, 1)$  et  $(0, 1, 0)$ .

## 3 FAMILLES DE VECTEURS

## Exercice 8 (Pour commencer...)

- 1) Donner un exemple d'une famille qui est libre lorsque l'espace est un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel mais liée lorsque c'est un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel.
- 2) On pose  $e_1 = (-1, 1, 1)$ ,  $e_2 = (1, -1, 1)$  et  $e_3 = (1, 1, -1)$ . Montrer que  $(e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $\mathbf{R}^3$  et donner les coordonnées de  $(8, 4, 2)$  dans cette base.
- 3)  $(a, b)$  liée  $\Rightarrow b \in \text{Vect}(a)$  ?
- 4) Soient  $a, b, c$  trois vecteurs non nuls.  
 $(a, b, c)$  liée  $\Rightarrow c \in \text{Vect}(a, b)$  ?

## Exercice 9 (\*)

Les familles suivantes sont-elles libres ?

- 1)  $(1, 1, 1)$ ,  $(2, 2, 2)$  dans  $\mathbf{K}^3$ .
- 2)  $(1, 0, 1)$ ,  $(2, 2, 2)$  dans  $\mathbf{K}^3$ .
- 3)  $(1, 0, 1)$ ,  $(0, 2, 2)$ ,  $(3, 3, 0)$  dans  $\mathbf{K}^3$ .
- 4)  $(1, 2, 5)$ ,  $(-1, 2, -2)$ ,  $(-1, 6, 1)$  dans  $\mathbf{K}^3$ .

## Exercice 10 (\*)

Soient dans  $\mathbf{R}^3$  les vecteurs

$$v_1 = (1, 1, 0), \quad v_2 = (4, 1, 4) \quad \text{et} \quad v_3 = (2, -1, 4)$$

- 1) Montrer que  $v_1$  et  $v_2$  ne sont pas colinéaires.  
Faire de même avec  $v_1$  et  $v_3$ , puis avec  $v_2$  et  $v_3$ .
- 2) La famille  $(v_1, v_2, v_3)$  est-elle libre ?

## Exercice 11 (\*)

La famille  $x \mapsto e^x$ ,  $x \mapsto x^2$ ,  $x \mapsto \ln x$  est-elle libre dans l'espace vectoriel des applications de  $]0; +\infty[$  dans  $\mathbf{R}$  ?

## Exercice 12 (\*)

Soit  $a \in \mathbf{R}$ .  $u = (a, 1, 1)$ ,  $v = (1, a, 1)$  et  $w = (1, 1, a)$ .

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur  $a$  pour que  $(u, v, w)$  soit libre dans  $\mathbf{K}^3$ .

## Exercice 13 (\*)

Parmi les familles suivantes, lesquelles sont génératrices de  $\mathbf{R}^3$  ?

- 1)  $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 2))$ .
- 2)  $((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$ .
- 3)  $((0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0))$ .
- 4)  $((1, 0, 3), (0, 2, 1), (3, 1, 1), (2, 1, -1))$ .

## Exercice 14 (\*)

Montrer que la famille  $(2, 1, 1)$ ,  $(1, 4, 3)$ ,  $(0, 1, 1)$ ,  $(1, 2, 3)$  forme une famille génératrice de  $\mathbf{R}^3$ .

Trouver une base extraite de cette famille.

## Exercice 15 (\*)

Montrer que  $(X^2, (X+1)^2, (X-1)^2)$  est une base de  $\mathbf{K}_2[X]$  et donner les coordonnées de  $(X+2)^2$  dans cette base.

## Exercice 16 (\*\*)

On considère une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ . Les familles suivantes sont-elles libres :

- 1)  $(e_1, 2e_2, e_3)$ .
- 2)  $(e_1, e_3)$ .
- 3)  $(e_1, 2e_1 + e_4, e_4)$ .
- 4)  $(3e_1 + e_3, e_3, e_2 + e_3)$ .
- 5)  $(2e_1 + e_2, e_1 - 3e_2, e_4, e_2 - e_1)$ .
- 6)  $(e_1 + e_2, e_1 - e_2, e_3, e_1 + 2e_2 - e_4, 3e_1 - e_2 + e_3)$ .

## Exercice 17 (\*\*)

Montrer que les suites réelles  $(1)_{n \in \mathbf{N}}$ ,  $(n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(e^n)_{n \in \mathbf{N}}$  forment une famille libre de  $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ .

## Exercice 18 (\*\*)

Montrer que  $\{t \mapsto e^{\lambda t}, \lambda \in \mathbf{R}\}$  est une famille libre de  $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ .

## Exercice 19 (\*\*)

Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une famille libre de  $E$ .

Montrer que

$$a \notin \text{Vect}(e_1, \dots, e_p) \Rightarrow (e_1 + a, \dots, e_p + a) \text{ est libre.}$$

**Exercice 20 (\*\*) (Lemme d'échange)**

Soient  $(e_1, \dots, e_n)$  et  $(e'_1, \dots, e'_n)$  deux bases d'un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel  $E$ .  
Montrer qu'il existe  $j \in \{1, \dots, n\}$  tel que la famille  $(e_1, \dots, e_{n-1}, e'_j)$  soit encore une base de  $E$ .

**4 DIMENSION FINIE AVEC  $\mathbf{K}^N$** **Exercice 21 (\*) (Égalité d'espaces)**

Soient  $F, G$  les sous-espaces vectoriels de  $\mathbf{R}^4$  suivants :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 / x + y + z = 0 \text{ et } 2x + y + z - t = 0\}$$

$$G = \text{Vect}((1, -2, 1, 1), (1, 2, -3, 1), (5, -3, -2, 5)).$$

- 1) Calculer la dimension de  $F$ .
- 2) Montrer que  $G \subset F$ .
- 3) Montrer que  $G = F$ .

**Exercice 22 (\*\*)**

Montrer que dans  $\mathbf{R}^3$ ,

$$\text{Vect}((2, 3, -1), (1, -1, -2)) = \text{Vect}((3, 7, 0), (5, 0, -7)).$$

**Exercice 23 (\*\*)**

Dans  $\mathbf{R}^3$ , les deux espaces  $F_1 = \text{Vect}((1, 2, 3), (3, 2, 1))$ , et  $F_2 = \text{Vect}((1, 0, -1), (2, 4, 6))$  sont-ils égaux ?

**Exercice 24 (\*)**

Soient  $v_1 = (2, -1, -1)$ ,  $v_2 = (-1, 2, 3)$ ,  $v_3 = (1, 4, 7)$  et  $v_4 = (1, 1, 2)$ .  
On pose  $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ .

- 1) Montrer sans calcul que la famille  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$  est liée.
- 2) Quelle est la dimension de  $F$ .
- 3) Extraire de la famille  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$  une sous famille libre de cardinal maximal.
- 4) Compléter cette base en une base de  $\mathbf{R}^3$ .

**Exercice 25 (\*\*)**

Dans  $\mathbf{K}^4$ , on considère les vecteurs

$$\begin{array}{lll} v_1 = (1, 1, 1, 1) & v_2 = (1, 2, 3, 4) & v_3 = (3, 1, 4, 2) \\ v_4 = (10, 4, 13, 7) & v_5 = (1, 7, 8, 14) & \end{array}$$

- 1) La famille de ces cinq vecteurs est-elle libre ?
- 2) Quel est son rang ?
- 3) Extraire de cette famille une base  $\mathcal{L}$  de  $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ .
- 4) À quelle condition sur ses coordonnées, un vecteur  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  appartient-il à  $F$  ?
- 5) Compléter la famille  $\mathcal{L}$  en une base de  $\mathbf{K}^4$ .

**Exercice 26 (\*)**

- 1) Donner le rang de la famille :

$$S = \{u_1 = (1, 2, 1, 0), u_2 = (-1, 1, 1, 1), u_3 = (2, -1, 0, 1), u_4 = (2, 2, 2, 2)\}.$$

- 2) À partir d'une famille libre extraite de  $S$ , la compléter pour obtenir une base de  $\mathbf{R}^4$ .

**Exercice 27 (\*\*)**

Soit  $E = \left\{ (x_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathbf{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i = 0 \right\}$ .

- 1) Montrer que c'est un espace vectoriel.
- 2) Donner une base de  $E$ .

**5 AUTRES ESPACES****Exercice 28 (\*\*)**

- 1) Donner une base et la dimension de  $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$ .  
(matrices symétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ )
- 2) Faire de même avec  $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ .  
(matrices antisymétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ )
- 3) Montrer que  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbf{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ .

**Exercice 29 (\*)**

Dans  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ , on considère les trois vecteurs  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- 1) Montrer que  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est une base de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ .
- 2) Donner les coordonnées de  $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  dans cette base.

**Exercice 30 (\*\*)**

Soit  $E$  le sous-ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_3(\mathbf{K})$  défini par

$$E = \left\{ M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbf{K}^3 \right\}.$$

- 1) Montrer que  $E$  est un espace vectoriel.
- 2) Montrer que  $E$  est stable par produit matriciel.
- 3) Donner la dimension de  $E$ .

**Exercice 31 (\*\*)**

Soient  $p \in \mathbf{N}^*$  et  $E$  l'ensemble des suites réelles de période  $p$ . Montrer que  $E$  est un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Donner la dimension de  $E$  et une base.

**Exercice 32 (\*\*\*)**

Soit  $E = \{x \mapsto A \sin(x + \varphi), (A, \varphi) \in \mathbf{R}^2\}$ .

- 1) Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel des fonctions continues  $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ .
- 2) Donner une base de  $E$ .

## 6 ESPACES DE POLYNÔMES

**Exercice 33 (\*)**

Donner une famille génératrice de

$$\{P \in \mathbf{K}_3[X] \text{ tel que } P(0) = P'(0) = 0\}.$$

**Exercice 34 (\*)**

Pour  $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{K}^{n+1}$  deux à deux distincts, montrer que les polynômes interpolateurs de Lagrange associés à cette famille forment une base de  $\mathbf{K}_n[X]$ .

**Exercice 35 (\*\*) (base)**

Soit  $F$  défini par :

$$F = \left\{ P \in \mathbf{R}_3[X], \int_0^1 P = 0 \right\}.$$

- 1) Montrer que  $F$  est un espace vectoriel.
- 2) Donner une base de  $F$ .

**Exercice 36 (\*\*) (à savoir refaire)**

Soit  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  une famille de  $\mathbf{R}_n[X]$  telle que

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \deg P_i = i.$$

Montrer que cette famille est une base de  $\mathbf{R}_n[X]$ .

**Exercice 37 (\*\*)**

Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ , et  $P \in \mathbf{R}_n[X]$  de degré exactement égal à  $n$ . Montrer que  $(P, P', P'', P^{(3)}, \dots, P^{(n)})$  forme une base de  $\mathbf{R}_n[X]$ .

**Exercice 38 (\*\*)**

Pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on définit  $P_i = \sum_{k=0}^i X^k$ .

- 1) Montrer que  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  forme une base de  $\mathbf{R}_n[X]$ .
- 2) Exprimer la base canonique de  $\mathbf{R}_n[X]$  dans la base  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ .

**Exercice 39 (\*\*\*)**

Montrer que les polynômes  $P_k = X^k(1 - X)^{n-k}$  pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  forment une base de  $\mathbf{K}_n[X]$ .

## 7 SOMME D'ESPACES

**Exercice 40 (\*)**

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $\mathbf{R}^5$  de dimension 3. Montrer que  $F$  et  $G$  ne peuvent pas être en somme directe dans  $\mathbf{R}^5$ .

**Exercice 41 (\*)**

- 1) Montrer que  $\mathbf{C}$  est un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel et donner sa dimension.
- 2) Déterminer un supplémentaire de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{C}$  vu comme  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel.
- 3) Montrer a contrario, que  $\mathbf{C} = \text{Vect}_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$  sur le corps  $\mathbf{C}$ .

**Exercice 42 (\*\*)**

Dans  $\mathbf{R}^3$ , on considère

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x - y - 2z = 0\},$$

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x = 2y = x + z\}.$$

- 1) Donner la dimension de  $F$ , puis celle de  $G$ .
- 2) Montrer que  $F \oplus G = \mathbf{R}^3$ .

**Exercice 43 (\*)**

Soit  $E = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ . On note  $F$  l'ensemble des applications paires et  $G$  l'ensemble des applications impaires.

- 1) Montrer que  $F$  et  $G$  sont deux  $\mathbf{R}$ -espaces vectoriels
- 2) Montrer que  $E = F \oplus G$
- 3) Donner la décomposition de  $x \mapsto e^x$  comme somme directe d'un élément de  $F$  et d'un élément de  $G$ .

**Exercice 44 (\*) (Vers Grassmann...)**

$A, B, C$  sont trois sev de  $E$  tels que  $C \oplus (A \cap B) = B$ . Montrer que  $A + B = A \oplus C$ . Faire un schéma exemple sur  $\mathbf{R}^3$ .

**Exercice 45 (\*\*)**

On pose

$$F = \{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}}, f(1) = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}}, \exists a \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, f(x) = ax\}.$$

Montrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ .

**Exercice 46 (\*\*)**

Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel,  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ , et  $H$  un supplémentaire de  $F \cap G$  dans  $G$ . Montrer que  $F + G = F \oplus H$ .

**Exercice 47 (\*\*)**

Montrer que  $\{f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R}), \text{ tel que } \int_0^1 f = 0\}$  est un espace vectoriel.

Trouver un supplémentaire dans  $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ .

**8 APPROFONDISSEMENT****Exercice 48 (\*)**

Soient deux droites affines de  $\mathbf{R}^n$ ,  $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \emptyset$ . Les droites sont-elles nécessairement parallèles (même direction) ? Discuter en fonction de  $n$ .

**Exercice 49 (\*\*)**

Soit  $E$  l'ensemble des fonctions continues sur  $[-1, 1]$  qui sont affines sur  $[-1, 0]$  et sur  $[0, 1]$ .

Démontrer que  $E$  est un espace vectoriel et en donner une base.

**Exercice 50 (\*\*)**

Soit  $n \geq 1$  et  $\alpha \in \mathbf{R}$ , on considère  $E = \mathbf{R}_n[X]$ .

On définit l'ensemble  $F = \{P \in E, P(\alpha) = 0\}$ , et les deux familles

$$\mathcal{C} = \{(X - \alpha)^k, k \in \llbracket 1, n \rrbracket\} \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = \{(X - \alpha)X^k, k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket\}.$$

- 1) Montrer que  $\mathcal{C}$  est une base de  $F$ .

- 2) Quelle est la dimension de  $F$  ?
- 3) Montrer que  $\mathcal{B}$  est une base de  $F$ .
- 4) Donner les coordonnées de  $(X - \alpha)^n$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
- 5) Trouver un espace vectoriel  $G$ , tel que  $F \oplus G = E$ .

**Exercice 51 (\*\*\*)**

$E$  est un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel

- 1) Soient  $F$  et  $G$  deux sous espaces vectoriels de  $E$ .  
Montrer que  $F \cup G$ , est un espace vectoriel si, et seulement si  $F \subset G$  ou  $G \subset F$ .
- 2) Soient  $F_1, F_2, \dots, F_n$  des sous espaces vectoriels de  $E$ .  
Montrer que  $F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n$  est un espace vectoriel si, et seulement si l'un des  $F_i$  est égal à l'union.  
*Indication :* Une droite affine qui coupe un espace vectoriel en au moins deux points est incluse dans cet espace.

**Exercice 52 (\*\*\*)**

Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ .

Pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on pose

$$P_k = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (X - i) = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}.$$

- 1) Montrer que la famille  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  est une base de  $\mathbf{R}_n[X]$ .
- 2) Montrer que  $\forall x \in \mathbf{Z}, \forall k \in \mathbf{N}, P_k(x) \in \mathbf{Z}$ .
- 3) Trouver tous les polynômes  $P$  tels que

$$\forall x \in \mathbf{Z}, P(x) \in \mathbf{Z}.$$