

LIMITES ET CONTINUITÉ

1 LIMITES

Exercice 1 (*)

Pour chacune des fonctions suivantes dire si elle admet une limite au point a , une limite à droite, à gauche.

Si elle est définie en a , étudier sa continuité en a , à droite de a , à gauche de a .

Si elle n'est pas définie en a , étudier si elle admet un prolongement par continuité en a .

- | | |
|--|--|
| 1) $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ en $a = 1$. | 7) $x \mapsto \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^2 - 1}$ en $a = 1$. |
| 2) $x \mapsto \frac{ x }{x}$ en $a = 0$. | 8) $x \mapsto \sqrt{x} \ln x$ en $a = 0$. |
| 3) $x \mapsto [x]$ en $a = 1$. | 9) $x \mapsto x \ln x $ en $a = 0$. |
| 4) $x \mapsto x \left 1 + \frac{1}{x} \right $ en $a = 0$. | 10) $x \mapsto x^\pi$ en $a = 0$. |
| 5) $x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$ en $a = 0$. | 11) $x \mapsto \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1}$ en $a = 1$. |
| 6) $x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ en $a = 0$. | 12) $x \mapsto \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 7x}$ en $a = 0$. |

Exercice 2 ()**

Déterminer les limites suivantes si elles existent :

- | | |
|--|---|
| 1) $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right]$. | 2) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x) \ln(\ln x)$. |
|--|---|

Exercice 3 ()**

$$f : x \mapsto \frac{x^x}{[x]^{[x]}}$$

La fonction admet-elle une limite en $+\infty$?

Indication : étudier $f(n)$ et $f(n + \frac{1}{2})$.

2 FONCTIONS USUELLES

Exercice 4 ()**

Étudier la continuité sur \mathbf{R} de l'application

$$f : x \mapsto [x] + \sqrt{x - [x]}.$$

Exercice 5 (*)**

Étudier la continuité de la fonction définie sur \mathbf{R}_+ .

$$f : x \mapsto \sup_{n \in \mathbf{N}} \frac{x^n}{n!}$$

3 CONTINUITÉ

Exercice 6 (*)

Montrer qu'un polynôme réel de degré impair admet au moins une racine réelle.

Exercice 7 (*)

Montrer qu'une application continue périodique sur \mathbf{R} est bornée et atteint ses bornes.

Exercice 8 (*)

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1]; [0, 1])$.

Montrer que f admet un point fixe dans $[0, 1]$, c'est-à-dire $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 9 (*)

Montrer que si $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est continue et n'admet pas de point fixe, alors $f \circ f$ n'admet pas de point fixe non plus.

Montrer que le résultat n'est plus vrai si f n'est pas supposée continue.

Exercice 10 ()**

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \in \mathbf{R}$.

Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 11 (*)

Montrer que les seules applications continues sur \mathbf{R} à valeurs dans \mathbf{Z} sont les applications constantes.

Exercice 12 ()**

Soit $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$, continue, telle que $\forall x \in \mathbf{R}_+^*, f(x) < x$.

- 1) Montrer que $f(0) = 0$.
- 2) Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}_+^*$, avec $a \leq b$, il existe $M \in [0, 1[$, tel que

$$\forall x \in [a, b], f(x) \leq Mx.$$

Exercice 13 (*)

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction bornée sur \mathbf{R} et $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur \mathbf{R} .

Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées sur \mathbf{R} .

Exercice 14 ()**

Soient $a < b$ deux réels, et f une fonction croissante sur $]a, b[$ et continue en a .
Montrer que f est croissante sur $[a, b]$.
Faire de même avec la stricte croissance.

Exercice 15 ()**

- 1) Soit f une application continue surjective de \mathbf{R}_+ sur \mathbf{R} . Montrer que pour tout $y \in \mathbf{R}$, y admet une infinité d'antécédents par f .
- 2) Ce résultat est-il aussi valable si l'application est de \mathbf{R}_+^* sur \mathbf{R} ? Justifier.
- 3) Donner l'exemple d'une application continue surjective de \mathbf{R}_+ sur \mathbf{R} . Démontrer que l'exemple est valable.

4 ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

Exercices à faire dans l'ordre. On pourra utiliser les résultats des exercices précédents pour résoudre les suivants.

Exercice 16 ()**

Trouver toutes les applications continues de \mathbf{R} dans \mathbf{R} telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Exercice 17 (*)**

Trouver toutes les applications continues de \mathbf{R} dans \mathbf{R} telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Exercice 18 (*)**

Trouver toutes les applications continues de \mathbf{R} dans \mathbf{R} telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y) + f(x) \times f(y).$$

5 ENTRAÎNEMENT**Exercice 19 (*)**

Montrer qu'une fonction polynomiale à valeurs dans \mathbf{Q} est constante.

Exercice 20 (*)

f continue sur $[0, 1]$, montrer que la suite $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \frac{f(k/n)}{2^k}\right)$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 21 ()**

Trouver les fonctions $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ solution de :

$$y' = |y|.$$

Exercice 22 ()**

Soit f décroissante et continue sur \mathbf{R} . Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 23 (*)**

Soit $f : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}$ une application croissante telle que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ soit décroissante.
Montrer que f est continue.

Exercice 24 (*)**

Soit f continue sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$.

- 1) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*, \exists a_n \in [0, 1], f(a_n) = a_n^n$.
- 2) En supposant f strictement décroissante, montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*, a_n$ est unique et étudier la suite (a_n) .

Exercice 25 (*)**

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ continue vérifiant

$$f \circ f = \text{Id}.$$

Déterminer f .

Exercice 26 (*)**

Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$ telle que $f(0) = f(1)$.

Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \exists \alpha_n \in [0, 1], \text{ tel que } f\left(\alpha_n + \frac{1}{n}\right) = f(\alpha_n).$$