Dérivabilité

1 Calcul

Exercice 1 (*)
Sur quelle(s) partie(s) de $\mathbf{R}$, les applications suivantes sont-elles continues ? dérivables ? Calculer leur dérivée.
Dans le cas d'un prolongement possible par continuité, étudier la dérivabilité de la fonction prolongée, éventuellement son caractère $\mathscr{C}^1$.

1) $f\ :\ x \mapsto 2^{x^2+1}$.
2) $f\ :\ x \mapsto x|x|$.
3) $f\ :\ x \mapsto \frac{x}{|x|+1}$.
4) $f\ :\ x \mapsto \sqrt{x^2-x^3}$.
5) $f\ :\ x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.
6) $f\ :\ x \mapsto \ln(\sqrt{x-1}+1)$.
7) $f\ :\ x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{|x|}} \sin\frac{1}{x}$.
8) $f\ :\ x \mapsto (x+1)^{\cos x}$.
9) $f\ :\ x \mapsto (\sqrt{x}+1)^{\ln x}$.
10) (***) $f\ :\ x \mapsto \left(\frac{x}{x-1}\right)^{-x}$.

Exercice 2 (*)
Déterminer les extrémums locaux de $f\ : x \mapsto x^4 - x^3 + 1$ sur $\mathbf{R}$.

Exercice 3 (*)
À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+,\ \frac{x}{1+x^2} \leqslant \operatorname{Arctan} x \leqslant x.$$

Exercice 4 (**)
À l'aide du théorème des accroissements finis, déterminer

$$\lim_{x\to+\infty} \left((x+1)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} - x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right).$$

Exercice 5 (**)
Soit $f\ :\ x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$.

1) Montrer que f peut être prolongeable en une application continue sur $\mathbf{R}$.
   On travaillera désormais avec l'application prolongée.
2) Faire l'étude des branches infinies de f.
3) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}, \exists P_n \in \mathbf{R}[X]$ tel que
$$\forall x \in \mathbf{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}.$$
4) En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

Exercice 6 (**) (Règle de l'Hospital)
Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$ et telles que g' ne s'annule pas sur $]a,b[$.

1) Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
2) En déduire que :
$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \ell.$$
3) Application : calculer
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \mathrm{e}^x}{(x+1)\,\mathrm{e}^x - 1}.$$

2 Fonctions lipschitziennes

Exercice 7 (*)
Soient $K_1 \leqslant K_2$ deux réels positifs.
Comparer les ensembles : $\{f\ : I \to \mathbf{R},\ f \text{ est } K_1 - \text{lipschitzienne sur } I\}$ et
$\{f\ : I \to \mathbf{R},\ f \text{ est } K_2 - \text{lipschitzienne sur } I\}$.

Exercice 8 (**)
Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $\alpha > 1$. Déterminer toutes les applications vérifiant

$$\forall (x,y) \in I^2,\ |f(x)-f(y)| \leqslant |x-y|^\alpha.$$

3 Raisonnements théoriques simples

Exercice 9 (*)
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dérivable, telle que f' ne s'annule pas. Montrer que f ne peut pas être périodique.

Exercice 10 (*)
Soit f une fonction dérivable sur I.

1) Montrer que si f est paire, alors f' est impaire.
   Montrer que si f est impaire, alors f' est paire.
2) A-t-on les réciproques ?

Exercice 11 (*)
Soit f dérivable en a. Montrer que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a).$$

Réciproquement, si la limite précédente existe, f est-elle nécessairement dérivable en a ?

Exercice 12 (**) (à connaître)
Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme de degré supérieur ou égal à 2 scindé à racines simples. Montrer que P' est aussi scindé à racines simples.

Exercice 13 (**)
Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable, et

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} [0;1] & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} f(2x) & \text{si } x \in [0; \frac{1}{2}] \\ f(2x-1) & \text{sinon.} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

À quelle(s) condition(s) g est-elle dérivable ?

Exercice 14 (**)
Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ telle que $f'(0) = 0$.
Montrer qu'il existe une fonction $g \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ telle que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$,

$$f(x) = g\left(x^2\right).$$

Exercice 15 (**) (méthode)
Soit f dérivable sur $]0, 1[$ et admettant une limite finie commune en 0 et en 1.

1) Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.
2) Est-ce encore vrai si la limite n'est pas supposée finie ?
3) Soit f dérivable sur $\mathbf{R}$ et admettant la même limite finie en $\pm\infty$.
Montrer qu'il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

4 Convexité

Exercice 16 (*)
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ convexe.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit bornée.

Exercice 17 (*)
Soient f et g deux fonctions convexes $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que g est croissante.
Montrer que $g \circ f$ est convexe.
Donner un contre-exemple si g n'est pas croissante.

Exercice 18 (**)
Soit f convexe de $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, montrer que f est continue.

Exercice 19 (*)
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction convexe.

1) On suppose que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
Montrer que f est positive.
2) On suppose que le graphe de f possède la droite $y = ax + b$ comme asymptote oblique en $+\infty$.
Donner la position de f par rapport à son asymptote.

Exercice 20 (*)
Soit f convexe sur $\mathbf{R}$ qui admet un minimum local en a.
Montrer que ce minimum est global.

Exercice 21 (**)
Soit $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ convexe et $g : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ affine.
On suppose que $\forall x > 0,\ f(x) \leqslant g(x)$ et $f(1) = g(1)$.
Montrer que $f = g$.

Exercice 22 (***)
Soient $(x_1, \cdots, x_n, y_1, ..y_n)$ des réels positifs. Montrer que

$$(x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} + (y_1 \cdots y_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant ((x_1 + y_1) \times \cdots (x_n + y_n))^{\frac{1}{n}}.$$

Indication : on pourra s'intéresser à la fonction $x \mapsto \ln(1 + e^x)$.

5 Approfondissement

Exercice 23 (***)
Soit $n \in \mathbf{N}^*$, on considère le polynôme

$$P = \left(X^2 - 1\right)^n.$$

1) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$

$$P^{(k)}(-1) = P^{(k)}(1) = 0.$$

2) Montrer que $P^{(n)}$ est scindé à racines simples sur $\mathbf{R}$ et que toutes ses racines sont dans $]-1, 1[$:

$$\mathrm{Rac}(P^{(n)}) \subset]-1, 1[.$$

3) Calculer $P^{(n)}(1)$.

Exercice 24 (***) (Théorème de Darboux)
Soit I un intervalle ouvert, $f \in \mathscr{D}^1(I, \mathbf{R})$. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbf{R}$.

Exercice 25 (***)
Soit $a > 0$ et f une fonction réelle continue sur $[0, a]$ et dérivable sur $]0, a]$.
On suppose que $f(0) = 0$ et $f(a)f'(a) < 0$.
Montrer qu'il existe $c \in]0, a[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 26 (***)
Soit $n \in \mathbf{N}$, I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f \in \mathscr{C}^n(I, \mathbf{R})$.
On suppose que f s'annule en $n + 1$ points distincts de I.

1) Montrer que la dérivée n-ième de f s'annule au moins une fois sur I.

2) Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Montrer que la dérivée $(n-1)^{\text{ème}}$ de $f' + \alpha f$ s'annule au moins une fois sur I.

Exercice 27 (***)
Soit f définie sur un voisinage de 0 et continue en 0.
On suppose que
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = 0.$$
Montrer que f est dérivable en 0.

Exercice 28 (***)
Soit $f\ : [0, 1] \to \mathbf{R}$, concave, telle que $f(0) \geqslant 0$.
Montrer que
$$\int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{3} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

6 Exercices CCINP

Exercice 29 (CCINP Exercice 3)

1) On pose $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.

2) On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$.
En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.

3) Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

Exercice 30 (CCINP Exercice 4)

1) Énoncer le théorème des accroissements finis.

2) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a, b[$.
On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et que f est dérivable sur $]a, x_0[$ et sur $]x_0, b[$.
Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.

3) Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\Longrightarrow$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.

Indication: on pourra considérer la fonction g définie par: $g(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.