

SUITES DÉFINIES PAR DES FONCTIONS

1 SUITES RÉCURRENTES

Exercice 1 (*)

Pour quels $u_0 \in \mathbf{R}$ la suite définie par $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{1-u_n}$ existe-t-elle ?
Montrer qu'elle est alors périodique.

Exercice 2 (*)

On considère la suite u définie par $u_0 \in [0, 1]$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n^2} = f(u_n)$$

- 1) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$.
- 2) Montrer que f admet un unique point fixe sur $[\frac{1}{2}, 1]$ (dont on ne cherchera pas la valeur). On note ce point fixe ℓ .
- 3) Montrer que (u_n) converge vers ℓ .

Exercice 3 (**)

On considère la suite u définie par $u_0 \in [0, 1]$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n^2} = f(u_n)$$

- 1) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n \in [0, 1]$.
- 2) Montrer que f admet un unique point fixe sur $[0, 1]$ (dont on ne cherchera pas la valeur). On note ce point fixe ℓ .
- 3) Montrer que (u_n) converge vers ℓ .

Exercice 4 (**)

Étudier la suite définie par

$$u_0 = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 1 - \cos u_n.$$

Exercice 5 (**)

On définit la suite u par $u_0 \in]0, 1[$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{u_n} + \sqrt{1-u_n}}.$$

- 1) Montrer que la suite u est bien définie.
- 2) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$. Montrer que la suite v est bien définie, et exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .
- 3) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 6 (**)

On considère la suite u définie par $u_0 \in]3, 4[$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = 4 - \frac{1}{4} \ln u_n = f(u_n).$$

Étude de la suite.

Exercice 7 (***)

On considère l'application f définie par

$$f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{1+x}}.$$

- 1) Étudier le domaine de définition de f .
- 2) On pose $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
Montrer que la suite est bien définie et étudier sa nature.

Exercice 8 (***) (Théorème du point fixe)

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème du point fixe de Banach-Picard.

Soit I un intervalle, et $f : I \rightarrow I$ une application contractante :

$$\exists k \in [0, 1[, \forall (x, y) \in I^2, |f(y) - f(x)| \leq k |y - x|.$$

On considère la suite définie par

$$x_0 \in I, \forall n \in \mathbf{N}, x_{n+1} = f(x_n).$$

- 1) Montrer que si f admet un point fixe sur I , alors il est unique.
- 2) (a) Montrer qu'il existe $M \in \mathbf{R}$ et $k < 1$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall p \in \mathbf{N}, |x_{n+p} - x_n| \leq k^n M.$$

- (b) En déduire que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, \forall p \in \mathbf{N}, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_{n+p} - x_n| \leq \varepsilon.$$

On dit que $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy.

- 3) Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée.
- 4) Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge.
- 5) On note ℓ la limite de (x_n) . Montrer que $\ell \in I$, alors $f(\ell) = \ell$.

Exercice 9 (*)**

- 1) Si u est une suite réelle telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$, alors les valeurs d'adhérence de u forment un intervalle.
- 2) Soit $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction continue. On considère la suite définie par

$$u_0 \in [a, b], \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

Montrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$, alors $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge.

2 SUITES IMPLICITES

Exercice 10 ()**

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la fonction f_n définie sur \mathbf{R}_+ par

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n kx^k.$$

- 1) Pour tout $n \geq 1$, montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution sur \mathbf{R}_+ que l'on notera u_n .
- 2) En comparant $f_{n+1}(u_n)$ et $f_{n+1}(u_{n+1})$, montrer que la suite u est monotone.
- 3) En déduire que la suite converge.

Exercice 11 ()**

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur \mathbf{R} par

$$f_n(x) = x^{n+1} - x^{n-1} + 1.$$

- 1) Dresser le tableau de variations de f_n , préciser le nombre de solutions de l'équation $f_n(x) = 3 + \frac{1}{n}$.
- 2) On note x_n l'unique solution positive de l'équation précédente.
 - (a) Déterminer x_1 .
 - (b) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*, x_n \geq 1$.
 - (c) Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ pour tout $x \geq 1$.
En déduire la monotonie de la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$
- 3) Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 12 ()**

- 1) Soit $n \geq 1$. Montrer que l'équation d'inconnue $x : \tan(nx) = \frac{1}{2x}$ admet une unique solution sur $]0, \frac{\pi}{2n}[$ notée x_n .
- 2) Montrer que $x_n \sim \frac{\pi}{2n}$.
- 3) Déterminer un équivalent simple de $x_n - \frac{\pi}{2n}$.

Exercice 13 (*)**

On considère la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x \ln(x)}{x+1}.$$

- 1) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution notée α_n .
- 2) Démontrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*, \alpha_n \geq e^n$ puis que $\alpha_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^n$.
- 3) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on définit ε_n tel que $\alpha_n = e^n(1 + \varepsilon_n)$.
Démontrer que $\varepsilon_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n e^{-n}$.
En déduire que $\forall n \in \mathbf{N}^*, \alpha_n - e^n \sim n$.

Exercice 14 (*)**

- 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'équation $x^n + x - 1 = 0$ admet une unique solution $\alpha_n \in]0; 1[$.
- 2) Montrer que la suite (α_n) est croissante et converge vers 1.
- 3) Montrer que $\alpha_n = 1 - \frac{\ln n}{n} + v_n$ avec $v_n = o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

Exercice 15 (*)**

Soit $n \geq 3$.

- 1) Montrer que l'équation $e^x = x^n$ admet deux solutions sur $]0, +\infty[$, notées u_n et v_n et telles que $1 < u_n < e < v_n$.
- 2) Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite ℓ .
- 3) Déterminer un équivalent simple de $\alpha_n = u_n - \ell$, puis trouver le terme suivant du développement asymptotique.
- 4) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.
- 5) Montrer que $v_n \sim n \ln n$.

3 EXERCICES CCINP

Déjà vu dans le chapitre sur la convergence des suites.

Exercice 16 (Exercice 43 CCINP)

Soit $x_0 \in \mathbf{R}$.

On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n)$.

- 1) (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0 , le sens de variation de (u_n) .
(b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
- 2) Déterminer l'ensemble des fonctions h , continues sur \mathbf{R} , telles que : $\forall x \in \mathbf{R}$, $h(x) = h(\text{Arctan } x)$.