DM 16 - Applications linéaires

Exercice 1
Voir la version modifiée utilisée au CB2 BL **??**
Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E, différent de $2\,\mathrm{Id}_E$ et différent de $-3\mathrm{Id}_E$, vérifiant la relation $\mathscr{R}$ suivante :

$$(\mathscr{R})\ :\qquad u\circ u+u-6\mathrm{Id}_E=0$$

où Id_E représente l'identité de E.

1) **(a)** Montrer qu'il existe un endomorphisme v de E tel que $u\circ v=6\mathrm{Id}_E$. Exprimer v en fonction de u.

(b) En déduire que u est inversible et déterminer son inverse.

2) Dans l'espace vectoriel les endomorphismes de E, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par u et par Id_E, c'est-à-dire :

$$F=\mathrm{Vect}\ (\mathrm{Id}_E,u)$$

(a) Montrer que la famille (Id_E,u) est libre dans l'espace vectoriel des endomorphismes de E. En déduire une base de F.

(b) Prouver que les endomorphismes f de F vérifiant la relation $f\circ f=f$, différents de l'endomorphisme nul et de l'identité de E, sont les endomorphismes p et q définis par :

$$\begin{cases} p &= \frac{1}{5}\,(2\mathrm{Id}_E-u)\\ q &= \frac{1}{5}\,(3\mathrm{Id}_E+u)\end{cases}$$

(c) Calculer $p\circ q$ et $q\circ p$.

(d) Établir que la famille (p,q) est une base de F.

(e) Déterminer les coordonnées de u et de u^{-1} dans cette base (p,q).
C'est-à-dire : exprimer u et u^{-1} comme combinaisons linéaires de p et q.

(f) Pour tout entier naturel k, non nul, exprimer p^k en fonction de p.

(g) Établir que, pour tout entier naturel n, u^n peut s'écrire comme combinaison linéaire de p et q. Donner les coordonnées de u^n dans la base (p,q).

(h) Le résultat obtenu est-il encore valable pour tout entier relatif n ?