Applications linéaires et représentation matricielle

1 Écriture matricielle

Exercice 1 (*)
Soit $M = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.
On note u_M l'application linéaire canoniquement associée à M *(dans les bases canoniques de $\mathbf{K}^4$ et $\mathbf{K}^3$)*.
Déterminer des bases de $\ker u_M$ et $\operatorname{Im} u_M$.

Exercice 2 (*)
Pour $n \in \mathbf{N}$, on définit l'application

$$u : \begin{cases} \mathbf{K}_n[X] & \to \mathbf{K}_{n+1}[X] \\ P & \mapsto XP(X) \end{cases}$$

1) Justifier que $u \in \mathscr{L}(\mathbf{K}_n[X], \mathbf{K}_{n+1}[X])$
2) Déterminer, avec le minimum de calculs, le noyau et l'image de u.
3) Déterminer la matrice de u entre les bases canoniques de $\mathbf{K}_n[X]$ et $\mathbf{K}_{n+1}[X]$.

Exercice 3 (*)
Pour $n \in \mathbf{N}*$, on définit l'application

$$u : \begin{cases} \mathbf{K}_n[X] & \to \mathbf{K}_n[X] \\ P & \mapsto P(X) - XP'(X) \end{cases}$$

1) Justifier que $u \in \mathscr{L}(\mathbf{K}_n[X])$
2) Déterminer le noyau et l'image de u.
3) Déterminer la matrice de u dans la base canonique de $\mathbf{K}_n[X]$.

Exercice 4 (**)
Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbf{K}^4$.
Montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de $\mathbf{K}^4$ tel que

- $f(e_1) = e1 - e_2 + e_3$,
- $f(2e_1 + 3e_4) = e_2$,
- $\ker f = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{K}^4,\ \text{tel que}$
  $x + 2y + z = 0 \text{ et } x + 3y - t = 0\}$.

Exercice 5 (*)
Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $f \in \mathrm{GL}(E)$.
Montrer qu'il existe deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ telles que la matrice de f entre les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ soit la matrice identité de taille n.

Exercice 6 (**)
On note $\mathscr{C} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.
Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\phi : \begin{pmatrix} \mathscr{M}_2(\mathbf{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbf{R}) \\ X & \mapsto & AX \end{pmatrix}$.
Montrer que ϕ est linéaire et donner sa matrice dans la base canonique.
Préciser $\ker \phi$ et $\operatorname{Im} \phi$.

Exercice 7 (**)
Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
On considère l'endomorphisme f dont la matrice dans la base $\mathscr{E}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer une base du noyau et de l'image de f.
2) De même avec f^2.
3) Vérifier que $E = \operatorname{Im} f^2 \oplus \ker f^2$.

2 Endomorphismes particuliers

Exercice 8 (**)
Soit $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Montrer que A est la matrice d'un projecteur dont on déterminera la base et la direction.

Exercice 9 (**)
Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathscr{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer A^2. Qu'en déduire sur f ?

2) Montrer que l'on peut construire une base $\mathscr{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ de E telle que la matrice de A dans $\mathscr{B}'$ soit

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donner la matrice de passage.

Exercice 10 (***)
Soient $(A,\, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbf{R}))$ et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \\ X & \mapsto & X + \mathrm{tr}(AX)B. \end{array} \right.$

1) Montrer que $f \in \mathscr{L}\left(\mathscr{M}_n(\mathbf{R})\right)$.

2) Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur A et B pour que f soit une symétrie.

3) Dans ce cas, donner la base et la direction de f.

3 Changement de base

Exercice 11 (*)
On note $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$.
Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2y,x). \end{array} \right.$

1) Déterminer la matrice $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f) = \mathrm{mat}(f, \mathscr{C}, \mathscr{C})$ de f dans la base $\mathscr{C}$.

2) Montrer que les vecteurs $b_1 = (1,1)$ et $b_2 = (-1,1)$ forment une base de $\mathbf{R}^2$ que l'on notera $\mathscr{B}$.

3) Déterminer les matrices $\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$, $\mathrm{mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f)$ et $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

Exercice 12 (*)
Soient $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de E et $\mathscr{B}' = (e_n, e_{n-1}, \cdots, e_1)$ la base lue en sens inverse.
Exprimer les matrices de passage : $\mathrm{Pa}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ et $\mathrm{Pa}_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$.

Exercice 13 (*)
Soit (e_1, e_2, e_3) une base de $\mathbf{R}^3$.
Chercher les applications $f \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^3)$ telles que la matrice de f dans (e_1, e_2, e_3) soit la même que dans (e_2, e_3, e_1).

Exercice 14 (*)
E est un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E.
On pose $u = -e_1 + e_2 + e_3,\ v = e_1 - e_2 + e_3,\ w = e_1 + e_2 - e_3$.

1) Montrer que $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ est une base de E et donner la matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$ et celle de $\mathscr{B}'$ vers $\mathscr{B}$.

2) Soit f l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.

Exercice 15 (*)
Dans $E = \mathbf{R}^4$ muni de sa base canonique $\mathscr{C}$, on définit les vecteurs

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Montrer que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base de E.
- Exprimer $\mathrm{Pa}_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$.

Exercice 16 (**)
Soit f un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie, tel que $f^2 = 0$. Déterminer une base de E où f est représentée par une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0_{s,r} & 0_s \\ I_r & 0_{r,s} \end{pmatrix}$.

Exercice 17 (**)
Soit E un $\mathbf{R}$-ev de dimension 3 et $f \in \mathscr{L}(E)$ non nulle telle que $f^2 = 0$.
Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f soit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 18 (**)
Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est A.

1) Montrer qu'il existe une base $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E telle que la matrice de f dans $\mathscr{C}$ soit D.

2) Déterminer la matrice P de $\mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$. Calculer P^{-1}.

3) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

4) En déduire le terme général des suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}, (y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et } \forall n \in \mathbf{N}, \begin{cases} x_{n+1} &= 4x_n - 2(y_n + z_n) \\ y_{n+1} &= x_n - z_n \\ z_{n+1} &= 3x_n - 2y_n - z_n \end{cases}$$

4 Rang

Exercice 19 (**)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \mathscr{L}(E)$.
Montrer que f est la somme de r endomorphismes de rang 1.

Exercice 20 (**)
Soit $\mathscr{C} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ et $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$. f_A est l'endomorphisme défini par $f(X) = AX$.

1) Quelle est la matrice de f_A dans $\mathscr{B}$ (en fonction des coefficients de A) ?

2) Quel est le rang de f_A ?

Exercice 21 (**)
Soit $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ une matrice diagonale par blocs.
Montrer que $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$.

Exercice 22 (***)
Soient $\alpha \in \mathbf{R}$ et $n \geqslant 2$.
On définit la matrice :

$$M_{\alpha,n} = (\cos((i+j)\alpha))_{(i,j)\in[\![0,n-1]\!]^2}\,.$$

Montrer que

1) $\operatorname{rg} M_{\alpha,n} = 2$ si $\alpha \notin \pi\mathbf{Z}$,

2) $\operatorname{rg} M_{\alpha,n} = 1$ si $\alpha \in \pi\mathbf{Z}$.

5 Entraînement

Exercice 23 (classique) (**)
Soient E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent non nul de E. On note p son indice de nilpotence (le plus petit entier tel que $f^p = 0$).

1) Soit $x \notin \ker f^{p-1}$.
Montrer que $(x, f(x), f^2(x), ..., f^{p-1}(x))$ est libre.

2) En déduire que $f^n = 0$.

3) On suppose à présent que $n = p$.
Montrer que $(x, f(x), f^2(x), ..., f^{p-1}(x))$ est une base de E.

4) Donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 24 (*)
On note $E = \mathbf{K}_2[X]$ de degré au plus 2.
φ est l'application de E dans $\mathbf{K}^3$ définie par $\varphi(P) = (P(0), P'(1), P''(2))$.

1) Démontrer que φ est un isomorphisme.

2) Donner la matrice A de φ dans les bases canoniques de E et de $\mathbf{K}^3$.

3) Pour $i \in \{1,2,3\}$, on pose $H_i = \varphi^{-1}(e_i)$.

4) À l'aide de la matrice A^{-1}, exprimer H_1, H_2, H_3 en fonction de e_1, e_2, e_3.

Exercice 25 (*)
Soit E un espace de dimension finie muni d'une base $(e_i)_{i\in[\![1,\,n]\!]}$.
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
On note M, la matrice de u dans (e_i) et pour tout $i \in [\![1,\,n]\!]$, $E_i = \operatorname{Vect}(e_1, \cdots, e_i)$.
Montrer que M est triangulaire supérieure si, et seulement si $\forall i \in [\![1,\,n]\!]$, E_i est stable par u.

Exercice 26 (**)
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n. Montrer que $\left(\mathrm{Id}, f, f^2, ..., f^{n^2}\right)$ est liée et en déduire qu'il existe un polynôme non identiquement nul qui annule f.

Exercice 27 (**)
Soit E un espace de dimension fini et f un endomorphisme de E de rang 1.

1) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $f^2 = \lambda f$.

2) Montrer que $\lambda = \operatorname{tr}(f)$.

Exercice 28 (***)
Montrer que pour tout endomorphisme f, il existe un isomorphisme g tel que fg soit un projecteur.

Exercice 29 (***)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ telle que

$$\forall i \in [\![1,\,n]\!], \sum_{j\neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}|\,.$$

Montrer que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.
On pourra considérer l'équation $AX = 0$.

Exercice 30 (***)
Soient $A \in \mathscr{M}_{3,\,2}(\mathbf{R})$ $B \in \mathscr{M}_{2,\,3}(\mathbf{R})$ telles que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que $BA = I_2$.

Exercice 31 (***)
Trouver l'ensemble des matrices qui ne sont semblables qu'à elles-mêmes.