

ANALYSE ASYMPTOTIQUE

Notation : $DL_k(x)$ désigne le développement limité à l'ordre k en x .

1 CALCULS

Exercice 1 (*)

Faire un développement limité de

- | | |
|---|---|
| 1) $DL_3(0)$ de $\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$ | 7) $DL_3(0)$ de $e^{\sin x}$ |
| 2) $DL_3(0)$ de $\ln(1 + \sin x)$ | 8) $DL_8(0)$ de $\sin^6 x$ |
| 3) $DL_3(1)$ de $\cos(\ln(x))$ | 9) $DL_2(0)$ de $\frac{\text{Arctan } x - x}{\sin x - x}$ |
| 4) $DL_6(0)$ de $\ln(\cos x)$ | 10) $DL_3(0)$ de $\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$ |
| 5) $DL_7(0)$ de $\sin(\text{Arctan}(x))$ | 11) $DL_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ de $\ln \sin x$ |
| 6) $DL_4(1)$ de $(\ln x)^2$ | 12) $DL_3(0)$ de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ |

Exercice 2 (*)

Déterminer les développements limités suivants :

- $DL_3(0)$ de $\frac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$.
- $DL_2(0)$ de $\frac{\text{Arctan } x}{\tan x}$.
- $DL_2(1)$ de $\frac{x-1}{\ln x}$.

Exercice 3 ()**

Donner le développement à l'ordre 5 en 0 de Arcsin par les deux méthodes suivantes

- $\text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\sin(\text{Arcsin } x) = x$ pour $x \in [-1; 1]$

Exercice 4 () (Équivalent simple)**

Donner un équivalent simple en 0 de

- $\sin(\text{sh } x) - \text{sh}(\sin x)$.
- $(1 + \sin x)^x - (1+x)^{\sin x}$.

2 DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

Exercice 5 (*)

Réaliser un développement asymptotique en $+\infty$ de

- $x\left(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} - x\sqrt{2}\right)$ à 2 termes
- $\sqrt[3]{x^3 + x} - \sqrt[3]{x^3 - x}$ à 4 termes.

Exercice 6 (*)

Réaliser un développement asymptotique en $+\infty$ de

- $\sqrt{x+1}$ à la précision $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$.
- $x \ln(x+1) - (x+1) \ln(x)$ à la précision $\frac{1}{x^2}$.
- $\text{Arctan}(x)$ à la précision $\frac{1}{x^3}$.

3 APPLICATIONS AUX ÉTUDES DE FONCTIONS

Exercice 7 (*) (Passage au logarithme)

Soient f, g deux applications strictement positives au voisinage de $a \in \overline{\mathbf{R}}$ telles que $f \sim_a g$.

On suppose que f admet une limite en a , notée $L \in \overline{\mathbf{R}}$ telle que $L \neq 1$

- Montrer que $\ln(f) \sim_a \ln(g)$.
- Montrer que le résultat est faux pour $L = 1$.

Exercice 8 (*)

Soit $f :]-1, 0[\cup]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}.$$

Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est alors dérivable en 0.

Quelle est alors la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente en ce point ?

Exercice 9 (*)

Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$$

peut être prolongée en une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbf{R} .

Exercice 10 ()**

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ et $a \in \mathbf{R}$.

Étudier la limite en 0 de

$$h \mapsto \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$

Exercice 11 ()**

Soient a un réel non nul et f la fonction définie au voisinage de 0 par

$$f(x) = \frac{\ln(1+ax)}{1+x}.$$

Déterminer les éventuelles valeurs de a pour lesquelles f présente un point d'inflexion en 0.

Un point d'inflexion est un changement de sens de courbure de la courbe.

Exercice 12 ()**

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = (1+x)e^{\frac{1}{x}}.$$

Étudier les branches infinies de f et donner la position des asymptotes par rapport à la courbe.

Exercice 13 ()**

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = x^2 \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$$

Étudier la branche infinie de f en $+\infty$ et donner la position des éventuelles asymptotes par rapport à la courbe.

Exercice 14 ()**

Étudier les branches infinies des fonctions suivantes.

1) $f : x \mapsto x^2 \operatorname{Arctan}(1+x^2).$

2) $f : x \mapsto x \sqrt{\frac{x-1}{3x+1}}.$

4 DÉVELOPPEMENTS IMPLICITES

Exercice 15 () (Étude locale d'une réciproque)**

Montrer que l'application $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x) = xe^{x^2}$ admet une application réciproque définie sur \mathbf{R} et former le $DL_5(0)$ de f^{-1} .

Exercice 16 (*)**

Pour $\lambda > 0$ on définit

$$f_\lambda : \begin{cases}]0, +\infty[& \rightarrow \mathbf{R} \\ x & \mapsto x^{-\lambda} e^{1/x}. \end{cases}$$

1) Montrer que l'équation $f_\lambda(x) = 1$ admet une unique solution x_λ .

2) Donner un développement asymptotique à trois termes de x_λ quand $\lambda \rightarrow +\infty$.

5 SUITES DÉFINIES IMPLICITEMENT

Reprise et prolongement des exercices sur les suites implicites.

Exercice 17 ()**

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note

$$f : \begin{cases} [0, \frac{\pi}{2}] & \rightarrow \mathbf{R} \\ x & \mapsto x \cos^n(x). \end{cases}$$

1) Montrer que f_n admet un maximum atteint en un unique point $x_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

2) Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge et calculer sa limite.

3) Trouver un équivalent de x_n en $+\infty$.

4) En déduire un équivalent de $f_n(x_n)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 18 ()**

On considère une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_n^5 + nu_n = 1.$$

1) Montrer que la suite est définie de manière unique.

2) Déterminer un développement asymptotique à deux termes de u_n en $+\infty$.

Exercice 19 (*)**

Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'équation

$$e^x = n - x$$

admet une unique solution positive x_n .

Déterminer un développement asymptotique à trois termes de x_n .

6 ENTRAÎNEMENT

Exercice 20 (*)

Calculer les limites des expressions suivantes (si elles existent).

- 1) $(\tan(x))^{\tan(2x)}$ en $\frac{\pi}{4}$.
- 2) $\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$ en 0.
- 3) $\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$ en 0.
- 4) $\frac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}$ en 1.
- 5) $\frac{1}{\sin^4(x)} \left(\sin\left(\frac{x}{1-x} - \frac{\sin(x)}{1-\sin(x)}\right) \right)$ en 0.
- 6) $\frac{(1+x)^{\frac{\ln(x)}{x}} - x}{x(x^x - 1)}$ en 0.

Exercice 21 (*)

Proposé par Rywann, 2021

Existe-il $\eta > 0$, $n \in \mathbf{N}$ et $(a_i)_{i \in [0, n]}$ tel que

$$\forall x \in]-\eta, \eta[, e^x = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

En d'autres termes, peut-on, pour un ordre assez grand, trouver un développement limité exact de l'exponentielle sur un voisinage de 0 ?

Exercice 22 ()**

Déterminer les développements limités suivants :

- 1) $DL_{10}(0)$ de $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.
- 2) $DL_3(2\pi)$ de $\sin \sqrt{x^2 - 3\pi^2}$.
- 3) $DL_{100}(0)$ de $\ln \left(\sum_{k=0}^{98} \frac{x^k}{k!} \right)$.

Exercice 23 ()**

Montrer qu'il existe deux réels a et b (que l'on calculera), tels qu'en $+\infty$ on ait

$$\int_0^1 (1+x^2)^{\frac{1}{n}} dx = a + \frac{b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 24 (*)**

Soient $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ et $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) = x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

- 1) Montrer que f est dérivable sur \mathbf{R} .
- 2) f admet-elle un développement limité en 0 ? si oui à quel ordre maximal ?

Exercice 25 (*)**

Soit $t > 0$.

- 1) Montrer que l'équation

$$x e^x = \frac{1}{t}$$

admet une unique solution $x_t > 0$.

- 2) Déterminer un développement asymptotique à trois termes de x_t quand $t \rightarrow +\infty$.

7 EXERCICES CCINP**Exercice 26 (CCINP 1)**

- 1) On considère deux suites numériques $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telles que $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
- 2) Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 27 (CCINP 46- extrait)

Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi \sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.