Espaces préhilbertiens et euclidiens

1 Produit scalaire

Exercice 1 (*)
Soient $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ deux vecteurs de $\mathbf{R}^3$.
On définit sur $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$, l'application φ par

$$\varphi(x, y) = ax_1y_1 + 2x_1y_2 + bx_2y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_3y_3.$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour que φ soit un produit scalaire sur $\mathbf{R}^3$.

Exercice 2 (*)
Dans $\mathbf{R}^3$, muni de sa structure euclidienne usuelle, on définit les vecteurs

$$u = (1, 1, 1),\ v = (0, 1, 0),\ w = (0, 0, 1).$$

1) Justifier que (u, v, w) est une base de E.
2) À l'aide du procédé d'orthonormalisation de Schmidt, obtenir une base orthonormale de E à partir de (u, v, w) (dans cet ordre).

Exercice 3 (*)
Soit $f \in \mathscr{C}^0([0, 1], \mathbf{R}_+)$ une application positive ou nulle. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit

$$I_n = \int_0^1 t^n f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Montrer que

$$\forall n, p \in \mathbf{N}^2, \quad I_{n+p}^2 \leqslant I_{2n} I_{2p}.$$

Exercice 4 (**)
Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire positive non identiquement nulle.
Soit $\eta \in [0, 1]$,

1) Montrer que
$$\mathbf{E}(X\mathbf{1}_{\{X \geqslant \eta \mathbf{E}(X)\}})^2 \leqslant \mathbf{E}(X^2)\mathbf{P}(X \geqslant \eta\mathbf{E}(X)).$$
2) En déduire
$$\mathbf{P}(X \geqslant \eta\mathbf{E}(X)) \geqslant (1-\eta)^2 \frac{\mathbf{E}(X)^2}{\mathbf{E}(X^2)}.$$

Exercice 5 (*)
Dans $\mathbf{R}^4$ muni de sa structure euclidienne usuelle,
on pose $F = \operatorname{Vect}(v_1, v_2)$ où $v_1 = (1, 2, -1, 1)$ et $v_2 = (0, 3, 1, -1)$.

1) Déterminer un système d'équations définissant $F^\perp$.
2) En déduire une base de $F^\perp$, puis une base orthogonale de $F^\perp$.

Exercice 6 (*)
Soit E espace euclidien muni du produit scalaire $< ., . >$.
Pour $a \in E$ non nul et $\lambda \in \mathbf{R}$, résoudre l'équation $< a, x >= \lambda$ d'inconnue $x \in E$.

Exercice 7 (*) (Réciproque de Pythagore)
Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$, et x_1, x_2, $\cdots$, x_p, p vecteurs de E.

1) Si $p = 2$, démontrer la réciproque du théorème de Pythagore :

   « Si la somme des carrés des longueurs de deux côtés du triangle est égale au carré de la longueur du troisième, alors le triangle est rectangle et le troisième côté est l'hypoténuse. »

2) Ce résultat est-il encore vrai pour $p \geqslant 3$?
   À savoir : si $\left\| \sum\limits_{i=1}^p x_i \right\|^2 = \sum\limits_{i=1}^p \|x_i\|^2$, alors la famille est orthogonale.

Exercice 8 (**)
Soit $(E, < ., . >)$ un espace préhilbertien réel, et $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ des vecteurs unitaires de E, tels que

$$\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n < x, e_i >^2 .$$

1) Montrer que $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une famille orthonormale de E.
2) Montrer que c'est une base de E.

Exercice 9 (***)
Sur $E = \mathscr{C}^0([a, b], \mathbf{R})$ (avec $a < b$), pour tout $p > 1$, on définit

$$\|\cdot\|_p : \begin{cases} E & \to & \mathbf{R} \\ f & \mapsto & \|f\|_p = \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \end{cases}$$

Le but de cet exercice est de montrer le résultat admis dans le cours, à savoir que $\|\cdot\|_p$ est bien une norme sur E.

1) À quoi correspond $\|.\|_2$?
En déduire que $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_2 + \|g\|_2$.

2) Pour généraliser cette relation, on pose $q > 1$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
On veut montrer l'inégalité de Hölder :

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q .$$

(a) Montrer que pour tous $(x, y) \in \mathbf{R}_+^2$,

$$xy \leqslant \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q.$$

(b) En déduire l'inégalité de Hölder.
Indication : On pourra commencer par la montrer pour des applications de « norme » 1.

3) Montrer que $\|.\|_p$ vérifie l'inégalité triangulaire (dite inégalité de Minkowski).
Indication : Appliquer l'inégalité de Hölder avec $(f+g)^p = (f+g)(f+g)^{p-1}$.

2 Applications linéaires

Exercice 10 (*)
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien E tel que

$$\forall (x, y) \in E^2, < f(x), y >=< x, f(y) > .$$

Montrer que $\operatorname{Im} f = (\ker f)^{\perp}$.

Exercice 11 (**)
Soit U un vecteur colonne de norme 1 pour le produit scalaire usuel.
On pose $P = U{}^tU$.
Montrer que P est une projection orthogonale sur un espace à déterminer.

Exercice 12 (**)
Soit E un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 2.
Soit $f \in \mathrm{GL}(E)$ tel que

$$\forall (x,\, y) \in E^2,\, (x|y) = 0 \Rightarrow (f(x)|f(y)) = 0.$$

1) Montrer que pour tout $y \in E,$ il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que

$$\forall x \in E,\, (f(x)|f(y)) = \lambda(x|y).$$

2) En déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in E,\, \|\alpha f(x)\| = \|x\| .$$

Exercice 13 (***)
Soient E, F deux espaces préhilbertiens,
$f : E \to F$ une application telle que

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall (x, y) \in E^2,\, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| .$$

Montrer que f est linéaire.

3 Inégalités

Exercice 14 (**)
Soit E un espace vectoriel euclidien et $\|.\|$ sa norme euclidienne.
Montrer qu'un projecteur est orthogonal si et seulement si

$$\forall x \in E, \qquad \|p(x)\| \leqslant \|x\| .$$

Exercice 15 (**)
Dans $\mathbf{R}^n$, on définit $P = (p_{i,j})_{i,j}$ la matrice de passage d'une base orthonormale à une autre. Montrer que

$$\left| \sum_{i,j} p_{i,j} \right| \leqslant n\sqrt{n}.$$

Exercice 16 (*) (Des calculs. . .)
Soit $E = \mathbf{R}[X]$, l'espace des polynômes réels.
On munit E du produit scalaire

$$< P, Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

1) À l'aide du procédé d'orthonormalisation de Schmidt, orthonormaliser la famille $(1, X, X^2, X^3)$.

2) Calculer la distance de X^3 à $\mathbf{R}_2[X]$.

Exercice 17 (**)
Calculer

$$\inf_{(a,b)\in\mathbf{R}^2} \int_0^{\pi} (\sin t - at - b)^2 \,\mathrm{d}t.$$

4 Entrainement

Exercice 18 (*)
Soit F le sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ définie par l'équation cartésienne :

$$F = \left\{ (x,\, y,\, z,\, t) \in \mathbf{R}^4,\, x + y - 2z = 0 \right\} .$$

Déterminer la distance de $(1,\, 1,\, 0,\, 1)$ à F.

Exercice 19 (**)
Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbf{R})$ muni du produit scalaire

$$< f, g >= \int_0^1 fg.$$

1) On pose $F = \left\{ f \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbf{R}),\ f(0) = 0 \right\}$. Montrer que $F^\perp = \{0\}$.

2) On pose $G = \mathscr{C}^1([0,1], \mathbf{R})$.
En s'aidant d'une intégration par parties, montrer que $G^\perp = \{0\}$.

3) Commenter.

Exercice 20 (**)
On a vu que pour un produit scalaire fixé, il est toujours possible d'orthonormaliser une base avec Gram-Schmidt.
Montrer que pour une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de E fixée, il est possible de trouver un produit scalaire pour lequel cette base est orthonormale.

Exercice 21 (***)

1) Démontrer le théorème de Fréchet-Von Neumann-Jordan : « Une norme est euclidienne si, et seulement si elle vérifie l'identité du parallélogramme. »
Indication : Utiliser une formule de polarisation symérique et commencer par démontrer que $< x, 2y >= 2 < x, y >$, *puis* $< x + x', y >=< x, y > + < x', y >$.

2) Démontrer que $(x, y) \mapsto |x| + 2|y|$ est une norme sur $\mathbf{R}^2$, mais qu'elle n'est pas euclidienne.

3) Démontrer que $f \mapsto \int_0^1 |f|$ est une norme sur $\mathscr{C}^0([0,1], \mathbf{R})$, mais qu'elle n'est pas euclidienne.

Exercice 22 (***) (Matrice de Gram)
Soit E un espace euclidien de dimension p et $(x) = (x_1, \cdots, x_n)$ une famille de E. On définit le déterminant de Gram par

$$G(x) = G(x_1, \cdots, x_n) = \det\left((x_i|x_j) \right)_{(i,\,j)}.$$

1) Montrer que (x) est une famille libre si, et seulement si $G(x) > 0$.

2) On suppose que $(x_1, \cdots, x_n)$ est une famille libre de E.
On note $F = \text{Vect}\,(x_1, \cdots, x_n)$.
Montrer que
$$d(x, F)^2 = \frac{G(x, x_1, \cdots, x_n)}{G(x_1, \cdots, x_n)}.$$

Exercice 23 (***)
Soit $E = \mathbf{R}[X]$, l'espace des polynômes réels.
On munit E du produit scalaire

$$< P, Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

Existe-t-il $A \in \mathbf{R}[X]$ tel que $\forall P \in \mathbf{R}[X],\ < P, A >= P(0)$.

Exercice 24 (**)
On note $\ell^1(\mathbf{N})$ l'ensemble des familles sommable indicées par $\mathbf{N}$ et $\ell_2(\mathbf{N})$ l'ensemble des familles de carré sommable (indicées par $\mathbf{N}$).

1) Montrer que ℓ^1 et ℓ^2 sont des espaces vectoriels.

2) Montrer que $\ell^1 \subset \ell^2$.

3) Montrer que $(a, b) \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ définit un produit scalaire sur ℓ_2.

Exercice 25 (***)
Soit E un espace préhilbertien, de produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ et de norme associée $\|\cdot\|$.
Soient $n \geqslant 1$, $(u_1, \cdots, u_n) \in E^n$ et $C > 0$.
On suppose que

$$\forall (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n,\ \left\| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k u_k \right\| \leqslant C.$$

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^n \|u_k\|^2 \leqslant C^2$.

5 CCINP

Exercice 26 (CCINP 39-extrait)
On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1) (a) Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.

On pose alors $(x|y) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

(b) Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

Dans la suite de l'exercice, on admet que $(\ |\ )$ est un produit scalaire dans ℓ^2.

2) On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.
Déterminer $F^\perp$ (au sens de $(\,|\,)$).
Comparer F et $\left(F^\perp\right)^\perp$.

Exercice 27 (CCINP 76)
Soit E un espace préhilbertien de produit scalaire $(|)$ et de norme eucldienne associée $\|\cdot\|$.

1) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Donner le cas d'égalité (avec démonstration).

2) Soit $E = \{f \in \mathscr{C}([a,\, b],\, \mathbf{R}),\, \forall x \in [a,\, b],\, f(x) > 0\}$.
Prouver que l'ensemble $\left\{\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{f(t)},\, f \in E\right\}$ admet une borne inférieure m.
Déterminer la valeur de m.

Exercice 28 (CCINP 77)
Soit E un espace euclidien.
F, G sont deux sous-espaces vectoriels de E.

1) Montrer que $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.
2) Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
3) Montrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice 29 (CCINP 78)
Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E.
On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et de y et $||.||$ la norme euclidienne associée.

1) Soit u un endomorphisme de E, tel que : $\forall x \in E, ||u(x)|| = ||x||$.
   (a) Démontrer que: $\forall (x,y) \in E^2\ (u(x)|u(y)) = (x|y)$.
   (b) Démontrer que u est bijectif.

2) *On rappelle qu'une application u est une isométrie si, et seulement si* $\forall (x,\, y) \in E^2$, $\|u(x) - u(y)\| = \|x - y\|$.
Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles de E, muni de la loi $\circ$, est un groupe.

3) Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.
Prouver que : $u \in \mathcal{O}(E) \iff (u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

Exercice 30 (CCINP 79)
Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

1) Soit h une fonction continue et positive de $[a,\, b]$ dans $\mathbf{R}$.
Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow h = 0$.

2) Soit E le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,\, b]$ dans $\mathbf{R}$.
On pose
$$\forall (f,\, g) \in E^2,\ (f|g) = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$
Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

3) Majorer $\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ en utilisant Cauchy-Schwarz.

Exercice 31 (CCINP 80)
Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π périodiques de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

1) Démontrer que $(f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} fg$ définit un produit scalaire sur E.

2) Soit F, le sous-espace vectoriel engendré par $f\ : x \mapsto \cos(x)$ et $g\ : x \mapsto \cos(2x)$.
Déterminer le projeté orthogonal sur F de $u\ : x \mapsto \sin^2(x)$.

Exercice 32 (CCINP 81)
On définit dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{R}) \times \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ l'application φ par $\varphi(A,\, A') = \mathrm{tr}\left({}^tAA'\right)$.
On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.
On note $\mathscr{F} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\, (a,\, b) \in \mathbf{R}^2\right\}$.

1) Démontrer que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.
2) Déterminer une base de $\mathscr{F}^\perp$.
3) Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathscr{F}^\perp$.
4) Calculer la distance de J à $\mathscr{F}$.

Exercice 33 (CCINP 82)
Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$.
On admet que pour tout $x \in E$, il existe un unique $y_0 \in F$ tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.
Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $< A|A' >= aa' + bb' + cc' + dd'$.

1) Démontrer que $< \cdot | \cdot >$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

2) Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

Exercice 34 (CCINP 92)
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On considère $E = \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.
On pose $\forall (A,\, B) \in E^2,\ < A|B >= \operatorname{tr}({}^tAB)$ où tr désigne la trace et ${}^tA$ désigne la transposée de la matrice A.

1) Prouver qur $< .|. >$ est un produit scalaire sur E.

2) On note $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E.
Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque ${}^tA = -A$. On note $\mathscr{A}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
On admet que $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbf{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

   (a) Prouver que $E = \mathscr{S}_n(\mathbf{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbf{R})$.

   (b) Prouver que $\mathscr{A}_n(\mathbf{R})^\perp = \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$.

3) Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E.
Déterminer $F^\perp$.