Séries numériques

1 Calculs à la pelle

Exercice 1 (* → **)
Donner la nature de la série de terme général

1) $\ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$.
2) $\dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$.
3) $n^{-\ln(\ln n)}$.
4) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.
5) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.
6) $\dfrac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$.
7) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$.
8) $\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)-1$.

Exercice 2 (**)
Donner la nature de la série de terme général

1) $\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$.
2) $\dfrac{\ln(n)}{n!}$.
3) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2i}{3}\right)^n$.
4) $\sin(n)$.

Exercice 3 (*)
Montrer l'existence et calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Exercice 4 (**) (une méthode à connaître)
À l'aide de la comparaison série intégrale, donner un équivalent en $+\infty$ de

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$.
2) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}$.

2 Exercices théoriques

Exercice 5 (*)
Montrer que si $\sum(u_n+v_n)$ converge, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exercice 6 (*)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'entiers.
À quelle condition simple sur la suite, la série $\sum u_k$ converge-t-elle?

Exercice 7 (*)
Soit (u_n) une suite réelle strictement positive.
Montrer que la série $\sum \ln\left(\dfrac{u_{k+1}}{u_k}\right)$ converge si et seulement si la suite (u_n) converge vers une limite strictement positive.

Exercice 8 (*)
Trouver un exemple d'une suite positive convergente non monotone telle que $\sum u_n$ converge.

Exercice 9 (**)
Montrer que si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors $\sum u_n^2$ aussi.

Exercice 10 (**)
Soient (a_n) et (b_n) deux suites positives.

1) On suppose que $a_n = o(b_n)$.
   (a) Si $\sum b_n$ converge, montrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k\right)$.
   (b) Si $\sum b_n$ diverge, montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = o\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$.
2) Faire de même pour les suites équivalentes.

Exercice 11 (***)
Soit u une suite strictement positive. Pour tout $n\in\mathbf{N}$, on pose $a_n=\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

1) Montrer que si (a_n) bornée, alors il existe $s=\sup\{\text{valeurs d'adhérence de } a\}$ dans $\mathbf{R}_+$.
   Montrer alors que si $s\in[0,1[$, alors $\sum u_n$ converge.
2) Si (a_n) n'est plus supposée bornée, conserve-t-on le même résultat dans $\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$.

3 Autour des séries alternées

Exercice 12 (**)

On propose de calculer explicitement $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Pour tout $x \in [0,\, 1]$, pour tout $N \in \mathbf{N}$, on pose $S_N(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$.

1) Justifier que S est bien défini.

2) Déterminer une expression simple de S_N en fonction d'une intégrale.

3) En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.
On évitera de passer à la limite « sous l'intégrale ».

Exercice 13 (**)
Suite de l'exercice précédent : une autre méthode.
Pour tout $N \in \mathbf{N}$, on pose $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.
On rappelle que (S_N) est convergente (exercice précédent).
On rappelle également le résultat prouvé avec les suites :

$$H_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \ln(N) + \gamma + o(1)$$

avec $\gamma \in \mathbf{R}$, la constante d'Euler.

1) Exprimer S_{2N} en fonction de H_N et H_{2N}.

2) En déduire la limite de S_N quand N tend vers $+\infty$.

On aura encore une autre méthode avec le chapitre d'intégration.

Exercice 14 (***)
Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.
On définit φ sur $\mathbf{N}^*$ par

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \varphi(3n-2) = 2n-1,\ \varphi(3n-1) = 4n-2 \text{ et } \varphi(3n) = 4n.$$

1) Montrer que φ est une permutation de $\mathbf{N}^*$.

2) Justifier l'existence de la somme et calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$.
S'inspirer de l'exercice précédent.

4 Familles sommables

Exercice 15 (*)
Soit $q \in \mathbf{C}$ avec $|q| < 1$.
Montrer que la famille $\left(q^{|n|}\right)_{n\in\mathbf{Z}}$ est sommable et calculer sa somme.

Exercice 16 (*)
Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}.$$

Exercice 17 (**)

1) Soit $p \geqslant 1$, montrer que

$$\sum_{n=1,\, n\neq p}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - p^2} = \frac{3}{4p^2}.$$

2) Calculer $\sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{n=1,\, n\neq p}^{+\infty} \frac{1}{n^2-p^2}$ et comparer avec $\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=1,\, n\neq p}^{+\infty} \frac{1}{n^2-p^2}$.
Que peut-on en déduire.

Exercice 18 (**)
Montrer que pour tout $x \in]-1,\, 1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n) x^n$$

où $d(n)$ désigne le nombre de diviseurs positifs de n.

Exercice 19 (*) (Mines)
Pour $k \geqslant 2$, on note $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k}$.
Étudier la convergence des séries $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} (\zeta(k) - 1)$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} (-1)^k (\zeta(k) - 1)$ et calculer leur somme.

5 Entraînement

Exercice 20 (**) (Séries de Bertrand)
Soient α et β deux réels. On appelle série de Bertrand, la série

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\alpha} (\ln n)^{\beta}}.$$

Étudier la nature de cette série.

Exercice 21 (***)

1) Soit u une suite réelle positive.

Montrer que si $\left(\sum_{k=1}^{n^2-1} u_k\right)$ converge, alors la série $\sum u_k$ converge.

2) S'il y a convergence, calculer

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lfloor\sqrt{k+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{k}\rfloor}{k}.$$

Exercice 22 (***)

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle décroissante, positive.
On pose $\forall n \in \mathbf{N}, \quad v_n = 2^n u_{2^n}$.
Montrer que

$$\sum u_n \text{ converge si et seulement si } \sum v_n \text{ converge.}$$

2) Application : étudier la convergence des séries $\sum \frac{1}{n\ln n}$ et $\sum \frac{1}{n\ln n\ln(\ln n)}$.

3) *Généralisation :* Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle décroissante, positive et $p \in \mathbf{N}$ tel que $p \geqslant 2$.
On pose $\forall n \in \mathbf{N}, \quad v_n = p^n u_{p^n}$.
Montrer que

$$\sum u_n \text{ converge si, et seulement si } \sum v_n \text{ converge.}$$

Exercice 23 (***)
Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+^*)$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = -\infty$.

1) Montrer que la série de terme général $f(n)$ converge.

2) Donner un équivalent du reste $R_{n_0-1} = \sum\limits_{k=n_0}^{+\infty} f(k)$.

Exercice 24 (***)
Soit (a_n) une suite bornée telle que

$$\forall p \geqslant 2, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^p} = 0.$$

Montrer que (a_n) est la suite nulle.

Exercice 25
Soit σ une bijection de $\mathbf{N}^*$ dans lui-même. Déterminer la nature de :

1) (*) $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sigma(n)^2}$.

2) (**) $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sigma(n)}$.

3) (***) $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\sigma(n)}$.

4) (***) $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\sigma(n)}{n^2}$.

Exercice 26 (***)
Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. On veut montrer que $\sum\limits_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p}$ diverge.

Par l'aburde, on suppose qu'elle converge.
On écrit les nombres premiers par ordre croissant $(p_i)_{i\in\mathbf{N}}$.

1) Montrer qu'il existe $k \in \mathbf{N}$, tel que

$$\sum_{i=k+1}^{+\infty} \frac{1}{p_i} < \frac{1}{2}.$$

2) Soit $N \in \mathbf{N}^*$, on note $N_s = \mathrm{Card}\,\{n \in [\![1, N]\!], \exists p \geqslant k+1, p|n\}$ et $N_i = N - N_s$.
Montrer que $N_s < \frac{N}{2}$.

3) Montrer que $N_i \leqslant 2^k\sqrt{N}$. *Pour $n \in [\![1, N]\!]$ tel que $\forall i \geqslant k+1, p_i \nmid n$, on pourra noter $n = a_n b_n^2$, avec a_n le facteur sans carrés dans la décomposition en facteurs premiers.*

4) Conclure.

Preuve dûe à Erdòs.

Exercice 27 (**)
Soit u une suite décroissante telle que $\sum u_n$ converge.

1) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.
En considérant $S_{2n} - S_n$, montrer que $u_{2n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

2) Montrer que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

3) Le résultat est-il toujours vrai si u n'est pas supposée décroissante ?

6 Exercices CCINP

Exercice 28 (Exercice 5 CCINP)

1) On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\,(\ln n)^\alpha}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbf{R}$.

   (a) **Cas $\boldsymbol{\alpha \leqslant 0}$**

   En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.

   (b) **Cas $\boldsymbol{\alpha > 0}$**

   Étudier la nature de la série.
   Indication: on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

2) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

Exercice 29 (Exercice 6 CCINP)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

1) Démontrer que si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, alors la série $\sum u_n$ converge.

   Indication: écrire, judicieusement, la définition de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2) Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$?

Exercice 30 (Exercice 7 CCINP)

1) Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres réels positifs.
   On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont non nulles à partir d'un certain rang.
   Montrer que:

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

2) Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\left((-1)^n + \mathrm{i}\right)\ln n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)}$.

   Remarque : i désigne le nombre complexe de carré égal à -1.

Exercice 31 (Exercice 46 CCINP)
On considère la série: $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1) Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\dfrac{\pi}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.

2) En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.

3) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument?