

## PETITS CALCULS AVEC LES FONCTIONS

### Exercice 1 (Domaine de définition)

Chercher le domaine de définition (en justifiant).

- 1)  $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ .
- 2)  $x \mapsto \ln\left(x - \frac{1}{2-x}\right)$ .
- 3)  $x \mapsto \ln\left(2 - \frac{1}{\sqrt{x}-3}\right)$ .
- 4)  $x \mapsto \ln(|x+1|)$ .
- 5)  $x \mapsto \sqrt{\frac{2x-1}{\ln(x)}}$ .
- 6)  $x \mapsto \frac{1}{\ln(x^2+x+1)}$ .
- 7)  $x \mapsto \ln(x - \ln(x))$ .
- 8)  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}-x}$ .
- 9)  $x \mapsto \frac{1}{x+e^{-x}}$ .

### Exercice 2 (Limites)

Étudier pour  $x \rightarrow +\infty$ .

Faire l'étude complète de la branche en s'aidant du vademecum sur l'étude de fonctions.

- 1)  $3x\sqrt{x} - x^2$ .
- 2)  $x + \sin(x)$ .
- 3)  $\frac{x \sin(x)}{\ln(x)}$ .
- 4)  $\ln(x + e^{-x})$ .
- 5)  $\ln(2e^{3x} - x)$ .
- 6)  $\frac{e^{-x^2}}{x + e^{-x^3}}$ .
- 7)  $x e^{-\sqrt{\ln(x)}}$ .
- 8)  $e^{-x^2} \ln(1 + e^x)$ .
- 9)  $\ln(1 + e^x)$ .
- 10)  $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ .
- 11)  $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-x}$ .
- 12)  $\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{1+\ln(x)}$ .
- 13)  $\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{1+e^x}$ .
- 14)  $\ln(x) + x \sin(x)$ .

### Exercice 3

Dans chaque cas, déterminer le domaine de définition de la fonction et les intervalles de dérivabilité. Puis calculer la dérivée.

- 1)  $f_2 : x \mapsto \left(\frac{2x+1}{4-x}\right)^5$ .
- 2)  $f_3 : x \mapsto (1-x)\sqrt{x}$ .
- 3)  $f_4 : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x-2}$ .
- 4)  $f_5 : x \mapsto x \ln^n(x)$  pour  $n \geq 1$ .

### Exercice 4

Déterminer le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée.

- 1)  $f_1 : x \mapsto x^2 \sin(3x^2 + 6)$ .
- 2)  $f_2 : x \mapsto (1 + \cos(x))^2$ .
- 3)  $f_3 : x \mapsto \frac{e^{\cos(x)}}{e^{\sin(x)}}$ .
- 4)  $f_4 : x \mapsto \sqrt{2x^2 - 3}$ .
- 5)  $f_5 : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$ .
- 6)  $f_6 : x \mapsto \left(\frac{3x}{1-x}\right)^3$ .
- 7)  $f_7 : x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{x}}$ .
- 8)  $f_8 : x \mapsto \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$ .
- 9)  $f_9 : x \mapsto \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$ .
- 10)  $f_{10} : x \mapsto \sqrt{2 + \cos(x^2)}$ .
- 11)  $f_{11} : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ .
- 12)  $f_{12} : x \mapsto \sqrt{\frac{x-2}{x-3}}$ .

### Exercice 5

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes au point  $a$ , et calculer  $f'(a)$  le cas échéant.

- 1)  $f_1 : x \mapsto \sqrt{x^2 + 3x - 10}$  en  $a = 2$ .
- 2)  $f_2 : x \mapsto \frac{2x}{|x|+4}$  en  $a = 0$ .
- 3)  $f_3 : x \mapsto x + \sqrt{4-x^2}$  en  $a = 2$ .
- 4)  $f_4 : x \mapsto \sqrt{4x^3 - 4x^2 + x}$  en  $a = \frac{1}{2}$ .
- 5)  $f_5 : x \mapsto \sqrt{x\sqrt{x}}$  en  $a = 0$ .

*Rappel :* utiliser la définition de la dérivée à partir de la limite du taux d'accroissement.

### Exercice 6 (\*)

Déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle  $I$  indiqué.

- 1)  $f_1 : x \mapsto x^3 - 5x$  sur  $I = \mathbf{R}$ .
- 2)  $f_2 : x \mapsto 5x(x^2 - 1)^7$  sur  $I = \mathbf{R}$ .
- 3)  $f_3 : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)}$  sur  $I = [0, \frac{\pi}{2}[$ .
- 4)  $f_4 : x \mapsto \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}$  sur  $I = [0, \frac{\pi}]$ .