Banque CCINP
40 exercices de la banque sur le programme MPSI
(36 % des 112 énoncés de la banque)

Une légère modification de l'exercice n° 63 l'a rendu conforme au programme de première année.

Un clic sur un numéro envoie directement vers l'énoncé. Réciproquement, chaque énoncé contient un lien ramenant à cette page.

► Par numéros croissants

— **Analyse :** 1 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 33 ; 42 ; 43 ; 46 ; 52 ; 55 ; 56

— **Algèbre :** 60 ; 63 ; 64 ; 71 ; 76 ; 77 ; 78 ; 79 ; 80 ; 81 ; 82 ; 84 ; 85 ; 86 ; 87 ; 89 ; 90 ; 92 ; 94

— **Probabilités :** 95 ; 98 ; 99 ; 104 ; 105 ; 107 ; 109 ; 112

► Par thèmes

Analyse

— **Équations différentielles linéaires :** 42

— **Suites :** 43

— **Dérivation :** 3 ; 4

— **Développements limités :** 1 ; 46

— **Intégrales :** 56

— **Séries :** 5 ; 6 ; 7 ; 46

— **Fonctions de deux variables :** 33 ; 52

Algèbre

— **Nombres complexes :** 84 ; 89

— **Arithmétique :** 86 ; 94

— **Polynômes :** 85 ; 87 ; 90

— **Algèbre linéaire :** 55 ; 60 ; 64 ; 71 ; 85 ; 90

— **Déterminants :** 63

— **Algèbre euclidienne :** 76 ; 77 ; 78 ; 79 ; 80 ; 81 ; 82 ; 92

Probabilités

— **Dénombrement :** 112

— **Probabilités :** 105 ; 107

— **Variables aléatoires :** 95 ; 98 ; 99 ; 104 ; 109

Analyse 1

a. On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \sim v_n$.
Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

b. Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n = \mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$

retour à la première page

a. Soit $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que
$$n \geqslant n_1 \implies v_n \neq 0.$$
La suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est définie à partir du rang n_1 et elle converge vers 1. Il existe donc $n_0 \geqslant n_1$ tel que
$$n \geqslant n_0 \implies 1 - \frac{1}{2} \leqslant \frac{u_n}{v_n} \leqslant 1 + \frac{1}{2}.$$
En particulier,
$$n \geqslant n_0 \implies 0 < \frac{u_n}{v_n},$$
si bien que u_n et v_n sont de même signe pour $n \geqslant n_0$.

b. On sait que
$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right),$$
si bien que
$$u_n \sim -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{n^3}.$$
D'après la question précédente,
$$u_n < 0 \text{ à partir d'un certain rang.}$$

Analyse 3

a. On pose $g(x) = e^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définition respectifs.

b. On pose $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+x}$.
En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.

c. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

retour à la première page

a. La fonction g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. On prouve, par récurrence, que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g^{(k)}(x) = 2^k e^{2x}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\},\quad h^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}.$$

b. Les fonctions g et h sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ donc, d'après la formule de Leibniz, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$:
$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} g^{(n-k)}(x)h^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} 2^{n-k}e^{2x}\frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}} = n!e^{2x}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 2^{n-k}}{(n-k)!(1+x)^{k+1}}.$$

c. Notons (P_n) la propriété :

Si $f\colon I \to \mathbb{R}$ et $g\colon I \to \mathbb{R}$ sont n fois dérivables sur I alors, fg est n fois dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}(x).$$

Prouvons que (P_n) est vraie par récurrence sur n.
La propriété est vraie pour $n = 0$ et pour $n = 1$ (dérivée d'un produit).

Supposons la propriété vraie au rang $n \geqslant 0$. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ et $g\colon I \to \mathbb{R}$ deux fonctions $n+1$ fois dérivables sur I. Les fonctions f et g sont, en particulier, n fois dérivables sur I et donc par hypothèse de récurrence la fonction fg l'est aussi avec

$$\forall x \in I, \quad (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}(x).$$

Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, les fonctions $f^{(n-k)}$ et $g^{(k)}$ sont dérivables sur I donc par opération sur les fonctions dérivables, la fonction $(fg)^{(n)}$ est encore dérivable sur I. Ainsi la fonction fg est $(n+1)$ fois dérivable et

$$\forall x \in I, \quad (fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + f^{(n-k)}(x) g^{(k+1)}(x) \right).$$

En décomposant la somme en deux et en procédant à un décalage d'indice sur la deuxième somme, on obtient

$$\forall x \in I, \quad (fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x).$$

C'est-à-dire

$$(fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + \binom{n}{0} f^{(n+1)}(x) g^{(0)}(x) + \binom{n}{n} f^{(0)}(x) f^{(n+1)}(x).$$

Or, en utilisant le triangle de Pascal, on a $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.
On remarque également que $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}$ et $\binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$. On en déduit que

$$(fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x).$$

Donc (P_{n+1}) est vraie.

Analyse 4

a. Énoncer le théorème des accroissements finis.

b. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a,b[$.
On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et que f est dérivable sur $]a, x_0[$ et sur $]x_0, b[$.
Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.

c. Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\Longrightarrow$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.

Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

retour à la première page

a. Égalité des accroissements finis :

Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
Alors

$$\exists c \in \,]a,b[\,, \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

b. On pose $l = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$. Soit $h \neq 0$ tel que $x_0 + h \in [a, b]$. En appliquant l'égalité des accroissements finis à la fonction f, entre x_0 et $x_0 + h$, on peut affirmer qu'il existe c_h strictement compris entre x_0 et $x_0 + h$ tel que

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(c_h)h.$$

Quand $h \to 0$ (avec $h \neq 0$), on a, par encadrement, $c_h \to x_0$. Donc

$$\lim_{h \to 0} \frac{(f(x_0 + h) - f(x_0))}{h} = \lim_{h \to 0} f'(c_h) = \lim_{x \to x_0} f'(x) = l.$$

On en déduit que f est dérivable en x_0 et

$$f'(x_0) = l.$$

c. La fonction g proposée dans l'indication est évidemment dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Montrons que la fonction g est également dérivable en 0.

$$\frac{g(h) - g(0)}{h} = h \sin\left(\frac{1}{h}\right).$$

Or $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} h \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0$ car $\left|h \sin\left(\frac{1}{h}\right)\right| \leqslant |h|$. Donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.
Cependant,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad g'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

On observe que $2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ car $\left|2x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant 2|x|$. Mais $x \longmapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0. Donc g' n'a pas de limite en 0.

Analyse 5

1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

   a. Cas $\boldsymbol{\alpha \leqslant 0}$
   En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.

   b. Cas $\boldsymbol{\alpha > 0}$
   Étudier la nature de la série.
   Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2 + n)\right)^2}$.

retour à la première page

1. **a.** La fonction $t \mapsto t^{-\alpha}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$ car $-\alpha \leqslant 0$. Pour $n \geqslant 2$ on a donc

$$0 \leqslant \frac{1}{n(\ln 2)^\alpha} \leqslant u_n.$$

On sait que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente, donc la série $\sum \frac{1}{n(\ln 2)^\alpha}$ est divergente. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ est divergente.

b. Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto (\ln x)^\alpha$ sont > 0 et croissantes sur $]1, +\infty[$ (car $\alpha > 0$). Donc par produit $x \mapsto x(\ln x)^\alpha$ est > 0 et croissante sur $]1, +\infty[$. La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$, donc par composition f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$. Dans le cas d'une fonction continue par morceaux, positive et décroissante, on sait que

$$\text{la série } \sum f(n) \text{ et la suite } \left(\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_n \text{ sont de même nature.}$$

Or sur $]1, +\infty[$,

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} (\ln t)^{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln(\ln(t)) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

si bien que

$$\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\left((\ln n)^{1-\alpha} - (\ln 2)^{1-\alpha}\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha \leqslant 1 \\ \dfrac{(\ln 2)^{1-\alpha}}{\alpha - 1} & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

La suite $\left(\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_n$ est donc convergente si et seulement si $\alpha > 1$. En conclusion, la série $\sum f(n)$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

2. On note u_n le terme général de cette série. On observe que

$$e^{\frac{1}{n}} \sim 1.$$

Puis

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) = \exp\left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = e\left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = e - \frac{e}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

donc

$$e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{e}{2n}.$$

Enfin, en factorisant n^2,

$$\ln\left(n^2+n\right) = 2\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 2\ln n + o(1) \sim 2\ln n.$$

Par produit et quotient d'équivalents

$$u_n \sim \frac{e}{8} \cdot \frac{1}{n\,(\ln n)^2}.$$

D'après la question ***1***, on sait que la série $\sum \dfrac{1}{n\,(\ln n)^2}$ est convergente. Donc la série $\sum \dfrac{e}{8}\cdot\dfrac{1}{n\,(\ln n)^2}$ est convergente et $\dfrac{e}{8n\,(\ln n)^2} > 0$. Par le critère des équivalents pour des séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ est convergente.

Analyse 6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

a. Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

b. Quelle est la nature de la série $\sum \dfrac{n!}{n^n}$?

retour à la première page

a. Soit $r \in]\ell, 1[$. Par exemple on peut prendre $r = \dfrac{\ell+1}{2}$. Puisque $r - \ell > 0$:

$$\begin{aligned} \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad : \quad & \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell\right| \leqslant r - \ell \\ & \frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell \leqslant r - \ell \quad \text{car } x \leqslant |x| \\ & \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant r. \end{aligned}$$

Les réels u_n étant > 0, on en déduit par une récurrence immédiate et classique que

$$\forall n \geqslant n_0 \quad : \quad u_n \leqslant u_{n_0} r^{n-n_0}.$$

On sait donc qu'à partir d'un certain rang,

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{u_{n_0}}{r^{n_0}} \cdot r^n.$$

La série géométrique $\sum r^n$ est convergente car $r \in]-1,1[$. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ est convergente.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ on pose

$$u_n = \frac{n!}{n^n}. \quad \text{On a } \boxed{u_n > 0}.$$

On obtient

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Or

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(-n\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp\left(-1+o(1)\right),$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-1},$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-1}\boxed{<1}.$$

D'après la question précédente, la série $\sum u_n$ est convergente.

Analyse 7

a. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs.
On suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang.
Montrer que :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Longrightarrow \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

b. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum \frac{((-1)^n+i)\ln n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)}$.

Remarque : i désigne le (*sic !*) nombre complexe de carré égal à -1.

retour à la première page

a. Cours.

b. Notons $u_n = \dfrac{((-1)^n+i)\ln n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)}$. On observe que $|(-1)^n+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ et donc

$$|u_n| = \frac{\sqrt{2}\ln n \, \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+3}-1} \sim \underbrace{\frac{\sqrt{2}\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}}_{=v_n}.$$

On reconnaît une série de Bertrand. On choisit un nombre dans $\left]1,\frac{3}{2}\right[$, *par exemple* $\frac{5}{4}$. On constate que par croissances comparées,

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{5}{4}} v_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2}\ln n}{n^{\frac{1}{4}}} = 0.$$

Ainsi $v_n = o\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}\right)$ et à plus forte raison

$$v_n = O\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}\right).$$

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$ est convergente car $\frac{5}{4} > 1$. D'après le critère des O, la série $\sum v_n$ est absolument convergente. On sait que $|u_n| \sim v_n$ et $|u_n| \geqslant 0$. Par le critère des équivalents pour des séries à termes positifs, la série $\sum |u_n|$ est absolument convergente. Donc la série $\sum u_n$ est convergente.

Analyse 33

On pose $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $f(0, 0) = 0$.

a. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.

c. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

retour à la première page

a. Par opérations sur les fonctions continues, f est continue sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
On considère la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ définie par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $||(x, y)||_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$.
On a $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x| \leqslant ||(x, y)||_2$ et $|y| \leqslant ||(x, y)||_2$.
On en déduit que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $|f(x, y) - f(0, 0)| = \dfrac{|x||y|}{||(x, y)||_2} \leqslant \dfrac{(||(x, y)||_2)^2}{||(x, y)||_2} = ||(x, y)||_2 \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$.
On en déduit que f est continue en $(0, 0)$.

Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b. Par opérations sur les fonctions admettant des dérivées partielles, f admet des dérivées partielles en tout point de l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

En $(0, 0)$:
$\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1}{t}\left(f(t, 0) - f(0, 0)\right) = 0$, donc f admet une dérivée partielle en $(0, 0)$ par rapport à sa première variable et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$.
De même, $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1}{t}\left(f(0, t) - f(0, 0)\right) = 0$. Donc f admet une dérivée partielle en $(0, 0)$ par rapport à sa seconde variable et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

c. D'après le cours, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Or, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{y^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$.
On remarque que $\forall x > 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.
Donc, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \neq \dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$.
On en déduit que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0, 0)$.

Donc f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Analyse 42

On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$2xy' - 3y = 0 \quad (H)$$
$$2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E).$$

a. Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

b. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

c. L'équation (E) admet-elle des solution sur l'intervalle $[0, +\infty[$?

retour à la première page

a. On trouve comme ensemble des solutions de l'équation homogène sur $]0, +\infty[$ la droite vectorielle engendrée par $x \longmapsto x^{\frac{3}{2}}$. En effet, une primitive de $x \longmapsto \dfrac{3}{2x}$ sur $]0, +\infty[$ est $x \longmapsto \dfrac{3}{2}\ln x$.

b. On utilise la méthode de variation de la constante en cherchant une fonction dérivable k telle que $x \longmapsto k(x)x^{\frac{3}{2}}$ soit une solution de l'équation complète (E) sur $]0, +\infty[$. On arrive à $2k'(x)x^{\frac{5}{2}} = \sqrt{x}$ et on choisit $k(x) = -\dfrac{1}{2x}$.

Les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ sont donc les fonctions $x \longmapsto kx^{\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

c. Si on cherche à prolonger les solutions de (E) sur $[0, +\infty[$, alors le prolongement par continuité ne pose pas de problème en posant $f(0) = 0$.

En revanche, aucun prolongement ne sera dérivable en 0 car $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = k\sqrt{x} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x}} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -\infty$.

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $2xy' - 3y = \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$ est l'ensemble vide.

Analyse 43

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \operatorname{Arctan}(u_n)$.

1. ***a.*** Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).

b. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

2. Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbb{R}$, telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = h\left(\operatorname{Arctan} x\right).$$

retour à la première page

On pose $f(x) = \operatorname{Arctan}(x)$ et $g(x) = \operatorname{Arctan}(x) - x$.

1. ***a.*** **Premier cas** : si $u_1 < u_0$

Puisque la fonction $f\colon x \mapsto \operatorname{Arctan}(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors $\operatorname{Arctan}(u_1) < \operatorname{Arctan}(u_0)$ c'est-à-dire $u_2 < u_1$. Par récurrence, on prouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} < u_n$. Donc la suite (u_n) est décroissante.

Deuxième cas : si $u_1 > u_0$

Par un raisonnement similaire, on prouve que la suite (u_n) est croissante.

Troisième cas : si $u_1 = u_0$

La suite (u_n) est constante égale à 0.

Pour connaître les variations de la suite (u_n), il faut donc déterminer le signe de $u_1 - u_0$, c'est-à-dire le signe de $\operatorname{Arctan}(u_0) - u_0$. On étudie donc le signe de la fonction g. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \dfrac{-x^2}{1 + x^2}$. Donc $g'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$. Ainsi g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et comme g(0)=0 alors :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad g(x) < 0$$
$$\forall x \in]-\infty, 0[, \quad g(x) > 0.$$

On a donc trois cas suivant le signe de x_0 :
- Si $x_0 > 0$, la suite(u_n) est décroissante.
- Si $x_0 = 0$, la suite (u_n) est constante.
- Si $x_0 < 0$, la suite(u_n) est croissante.

b. La fonction g étant strictement décroissante et continue sur $\mathbb{R}$, elle induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Le nombre réel 0 admet donc un unique antécédent par g et, comme $g(0) = 0$, alors 0 est le seul point fixe de f. Donc si la suite (u_n) converge, elle converge vers 0, le seul point fixe de f.

Premier cas : si $u_0 > 0$

L'intervalle $]0, +\infty[$ étant stable par f, on a par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Donc la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge et ce vers 0, unique point fixe de f.

Deuxième cas : si $u_0 < 0$

Par un raisonnement similaire, on prouve que (u_n) est croissante et majorée par 0, donc elle converge vers 0, seul point fixe de f.

Troisième cas : si $u_0 = 0$

La suite (u_n) est constante.

Conclusion : la suite (u_n) converge toujours vers vers 0.

2. Soit h une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\text{Arctan}x)$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Considérons la suite (u_n) définie par $u_0 = x$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n).$$

On a alors $h(x) = h(u_0) = h(\text{Arctan}(u_0)) = h(u_1) = h(\text{Arctan}(u_1)) = h(u_2) = \dots$. Par récurrence, on prouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h(x) = h(u_n)$. De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} h(u_n) = h(0)$ par convergence de la suite (u_n) vers 0 et par continuité de h. On obtient ainsi $h(x) = h(0)$ et donc h est une fonction constante.

Réciproquement, toutes les fonctions constantes conviennent.

Conclusion : Seules les fonctions constantes répondent au problème.

Analyse 46

On considère la série $\sum \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

a. Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\dfrac{\pi}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.

b. En déduire que $\sum \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.

c. La série $\sum \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

retour à la première page

a. On factorise le terme principal n^2 :

$$\pi\sqrt{n^2+n+1} = \pi n\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On pose $h = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$. On observe que $h^2 = \dfrac{1}{n^2} + O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ et $h^3 = O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$. Sachant que lorsque $h \to 0$

$$(1+h)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + O\left(h^3\right),$$

on obtient

$$\pi\sqrt{n^2+n+1} = \pi n\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

b. On note

$$u_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right).$$

On sait que

$$u_n = \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^n\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^{n+1}\sin\left(\frac{3\pi}{8}\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

On obtient
$$u_n = \frac{3\pi}{8}\frac{(-1)^{n+1}}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
Ainsi
$$u_n = \frac{3\pi}{8}\frac{(-1)^{n+1}}{n} + v_n \quad \text{où} \quad v_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente. D'après le critère des O la série $\sum v_n$ est absolument convergente.
Par ailleurs on sait que la série $\sum \frac{3\pi}{8}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est convergente car $n \mapsto \frac{1}{n}$ décroît vers 0 (théorème des séries alternées). Par combinaison linéaire, la série $\sum u_n$ est convergente.

c. On a vu que
$$u_n \sim \frac{3\pi}{8}\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$
Donc
$$|u_n| \sim \frac{3\pi}{8}\cdot\frac{1}{n}.$$
La série $\sum \frac{3\pi}{8}\frac{1}{n}$ est divergente (série harmonique) et $|u_n| \geqslant 0$. Par le critère des équivalents pour des séries à termes positifs, la série $\sum |u_n|$ est divergente. La série $\sum u_n$ n'est donc pas absolument convergente.

Analyse 52

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

1. Prouver que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2-xy \geqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.

2. ***a.*** Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbb{R}^2$.

b. Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.

3. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.

a. Justifier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et les calculer.

b. Justifier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et et donner leur valeur.

c. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

retour à la première page

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. $x^2+y^2-xy-\frac{1}{2}(x^2+y^2) = \frac{1}{2}(x^2+y^2-2xy) = \frac{1}{2}(x-y)^2 \geqslant 0$.
Donc $x^2+y^2-xy \geqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.

2. ***a.*** Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. D'après ce qui précède, $x^2+y^2-xy = 0 \iff x^2+y^2 = 0 \iff x = y = 0$.
Ainsi, f est définie sur $\mathbb{R}^2$.

b. D'après les théorèmes généraux, f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
D'après **1.**, pour $(x,y) \neq (0,0)$, $0 \leqslant f(x,y) \leqslant \dfrac{2y^4}{x^2+y^2} \leqslant \dfrac{2(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2}$.
Ainsi, $0 \leqslant f(x,y) \leqslant 2(x^2+y^2) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$.
Or : f est continue en $(0,0) \iff f(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} f(0,0) = \alpha$.
Donc : f est continue en $(0,0) \iff \alpha = 0$.
Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}^2 \iff \alpha = 0$.

3. ***a.*** D'après les théorèmes généraux, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{-y^4(2x-y)}{(x^2+y^2-xy)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2y^5-3xy^4+4x^2y^3}{(x^2+y^2-xy)^2}$.

b. Pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

Pour tout $y \neq 0$, $\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = y \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

c. Pour montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, montrons que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
Pour cela, il suffit de montrer qu'elles sont continues en $(0,0)$.
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on note $r = \sqrt{x^2+y^2}$. On a alors $|x| \leqslant r$ et $|y| \leqslant r$.
De plus, $(x,y) \to (0,0) \iff r \to 0$.

D'après **1.** et l'inégalité triangulaire,
$\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| \leqslant 4\,\dfrac{|y^4(2x-y)|}{(x^2+y^2)^2} \leqslant 4\,\dfrac{r^4(2r+r)}{r^4} = 12r \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.
$\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right| \leqslant 4\,\dfrac{|2y^5 - 3xy^4 + 4x^2y^3|}{(x^2+y^2)^2} \leqslant 4\,\dfrac{2r^5+3r^5+4r^5}{r^4} = 36r \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$ et par suite sur $\mathbb{R}^2$.
Ainsi, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Analyse 55

Soit $a \in \mathbb{C}$. On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia-1)u_n.$$

1. ***a.*** Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs complexes.
b. Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.

2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$. Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.
Indication : discuter suivant les valeurs de a.

retour à la première page

1. ***a.*** ▶ La suite nulle est clairement élément de E.
▶ Soient $(u,v) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2} &= \lambda\left(2au_{n+1} + 4(ia-1)u_n\right) + \mu\left(2av_{n+1} + 4(ia-1)v_n\right)\\ &= 2a\left(\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}\right) + 4(ia-1)\left(\lambda u_n + \mu v_n\right).\end{aligned}$$

Donc $\lambda u + \mu v \in E$.

b. On définit la fonction

$$\begin{array}{rccl}\varphi : & E & \longrightarrow & \mathbb{K}^2\\ & u & \longmapsto & (u_0,u_1).\end{array}$$

▶ La fonction φ est <u>linéaire</u> car pour tout $(u,v) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$:

$$\varphi(\lambda u + \mu v) = (\lambda u_0 + \mu v_0, \lambda u_1 + \mu v_1) = \lambda(u_0,u_1) + \mu(v_0,v_1) = \lambda\varphi(u) + \mu\varphi(v).$$

▶ La fonction φ est <u>bijective</u>, car pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$ il est évident qu'il <u>existe</u> une <u>unique</u> suite $u \in E$ telle que $\varphi(u) = (\alpha,\beta)$. C'est la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_1 = \beta \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia-1)u_n. \end{cases}$$

▶ Ainsi φ est un <u>isomorphisme</u> d'espaces vectoriels. Puisque $\mathbb{K}^2$ est de dimension finie, E est de dimension finie et $\dim E = \dim \mathbb{K}^2 = 2$.

2. L'équation caractéristique est
$$r^2 - 2ar - 4(ia-1) = 0.$$
Son discriminant est
$$\Delta = 4a^2 + 16(ia-1) = 4(a^2+4ia-4) = 4(a+2i)^2.$$
▶ Si $a=-2i$, alors $\Delta = 0$ et la racine double de l'équation caractéristique est
$$r_0 = -2i.$$
On sait qu'il existe $(A,B) \in \mathbb{C}^2$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad u_n = (An+B)\,(-2i)^n.$$
Les conditions initiales $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ donnent
$$\begin{cases} B = 1 \\ (A+B)(-2i) = 1. \end{cases}$$
Après résolution :
$$A = -1 + \frac{1}{2}i \quad \text{et} \quad B = 1.$$
▶ Si $a \neq -2i$, alors $\Delta \neq 0$ et les deux racines distinctes de l'équation caractéristique sont
$$r_1 = a - (a+2i) = -2i \quad \text{et} \quad r_2 = a + (a+2i) = 2a+2i.$$
On sait qu'il existe $(A,B) \in \mathbb{C}^2$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad u_n = A(-2i)^n + B(2a+2i)^n.$$
Les conditions initiales $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ donnent
$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -2iA + (2a+2i)B = 1. \end{cases}$$
Après résolution :
$$A = \frac{2a+2i-1}{2a+4i} \quad \text{et} \quad B = \frac{1+2i}{2a+4i}.$$
▶ *Cette question était passionnante...*

Analyse 56

On considère la fonction H définie sur $]1,+\infty[$ par $H(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

a. Montrer que H est $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et calculer sa dérivée.

b. Montrer que la fonction u définie par $u(x) = \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}$ admet une limite finie en $x=1$.

c. En utilisant la fonction u de la question ***b.***, calculer la limite en 1^+ de la fonction H.

retour à la première page

a. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ est continue sur $]1,+\infty[$ (car ln est continue et ne s'annule pas sur cet intervalle).
On choisit $2 \in]1,+\infty[$. D'après le théorème fondamental, la fonction $F\colon x \in]1,+\infty[\mapsto \displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et $F'(x) = \dfrac{1}{\ln x}$.
On observe que $H(x) = F\left(x^2\right) - F(x)$. Par composition et différence, H est $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$. On calcule que
$$\forall x \in]1,+\infty[\quad : \quad H'(x) = 2xF'\left(x^2\right) - F'(x) = \frac{2x}{\ln\left(x^2\right)} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}.$$

b. Pour $x \in]0,+\infty[\setminus\{1\}$, $u(x) = \dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}$. Notons $h = x-1 \underset{x\to 1}{\to} 0$.

Alors $x-1-\ln(x) = h - \ln(1+h) = \frac{1}{2}h^2 + o(h^2) \underset{h\to 0}{\sim} \frac{1}{2}h^2$. De plus $(x-1)\ln x = h\ln(1+h) \underset{h\to 0}{\sim} h^2$. Par quotient d'équivalents, $u(x) \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{\frac{1}{2}h^2}{h^2} \sim \dfrac{1}{2}$: $\lim\limits_{x\to 1} u(x) = \dfrac{1}{2}$.

c. Pour $x > 1$, on calcule que

$$H(x) = \int_x^{x^2} u(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t-1} = \int_x^{x^2} u(t)\,\mathrm{d}t + [\ln(t-1)]_x^{x^2} = \int_x^{x^2} u(t)\,\mathrm{d}t + \ln\frac{x^2-1}{x-1},$$

ce qui laisse

$$H(x) = \int_x^{x^2} u(t)\,\mathrm{d}t + \ln(x+1)\,.$$

D'après la question précédente, la fonction $t \mapsto u(t)$ se prolonge en une fonction continue sur $[1,+\infty[$. On note encore u ce prolongement. D'après le théorème fondamental, $x \mapsto \int_1^x u(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$. *(Il est important de bien comprendre que la borne 1 est ici incluse.)*

Par composition et différence, $x \mapsto \int_1^{x^2} u(t)\,\mathrm{d}t - \int_1^x u(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x^2} u(t)\,\mathrm{d}t$ et également $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$. En particulier, elle est continue en 1. Par opération sur des limites finies :

$$\lim_{x\to 1} H(x) = \int_1^{1^2} u(t)\,\mathrm{d}t + \ln(1+1) = \ln 2.$$

Algèbre 60

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

- ***a.*** Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.
- ***b.*** f est-il surjectif ?
- ***c.*** Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.
- ***d.*** A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$?

retour à la première page

a. Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $f(M) = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{pmatrix}$. On observe que :

$$M \in \operatorname{Ker} f \iff a = -2c \text{ et } b = -2d \iff M = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix} \iff M = c\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=U_1} + d\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=U_2}.$$

Ainsi $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(U_1, U_2)$. La famille (U_1, U_2) est libre car U_1 et U_2 ne sont pas colinéaires (critère valable seulement pour deux vecteurs). Conclusion :

$$(U_1, U_2) \text{ est une base de } \operatorname{Ker} f.$$

b. On a vu que $\operatorname{Ker} f \neq \{\mathbb{O}_{2,2}\}$. Donc f n'est pas injectif. Puisque f est un endomorphisme de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on sait que :

$$f \text{ injectif} \iff f \text{ surjectif} \iff f \text{ bijectif}.$$

Conclusion : f n'est pas surjectif.

c. On a trouvé que $\dim \operatorname{Ker} f = 2$. D'après le théorème du rang, $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \operatorname{rg} f + \dim \operatorname{Ker} f$.
Donc $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} f = 2$. Or $f(E_{1,1}), f(E_{1,2}) \in \operatorname{Im} f$, c'est-à-dire

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} f \quad \text{et} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} f.$$

Les matrices V_1 et V_2 ne sont pas colinéaires, donc la famille (V_1, V_2) est une famille libre de 2 vecteurs de $\operatorname{Im} f$. De plus $\dim \operatorname{Im} f = 2$. Par théorème, (V_1, V_2) est une base de $\operatorname{Im} f$.

d. ▶ Soit $M \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$. Il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $M = \underbrace{cU_1 + dU_2}_{\in \operatorname{Ker} f} = \underbrace{aV_1 + bV_2}_{\in \operatorname{Im} f}$.

Alors $cU_1 + dU_2 - aV_1 - bV_2 = \mathbb{O}_{2,2}$, c'est-à-dire $\begin{pmatrix} -2c+a & -2d+b \\ c+2a & d+2b \end{pmatrix} = \mathbb{O}_{2,2}$. On obtient $\begin{cases} a-2c=0 \\ 2a+c=0 \end{cases}$ et $\begin{cases} b-2d=0 \\ 2b+d=0 \end{cases}$. Après résolution, $a=c=b=d=0$. Il reste $M = \mathbb{O}_{2,2}$.

▶ On résume :

$$\begin{cases} \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{\mathbb{O}_{2,2}\} \\ \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Par caractérisation des supplémentaires :

$$\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Remarque. On observe que $A^2 = 5A$, si bien que $(f \circ f)(M) = A^2M = 5f(M)$ pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On pose $p = \frac{1}{5}f$. On constate que $p \circ p = p$. L'endomorphisme p est donc une projection de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Par conséquent

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}\left(\frac{1}{5}f\right) \oplus \operatorname{Im}\left(\frac{1}{5}f\right).$$

Il est clair que $\operatorname{Ker}\left(\frac{1}{5}f\right) = \operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{5}f\right) = \operatorname{Im} f$, si bien que sans calculs :

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f ...$$

Algèbre 63

Soit un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour $n \geqslant 1$, on désigne par D_n le déterminant de A_n.

a. Démontrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.

b. Déterminer D_n en fonction de n.

c. ~~Justifier que A_n est diagonalisable. Le réel 0 est-il valeur propre de A_n ?~~ La matrice A_n est-elle inversible ?

retour à la première page

a. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On développe par rapport à la première ligne :

$$D_{n+2} = (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & & (0) \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & -1 & 2 \end{vmatrix}_{n+1} + (-1)^{1+2} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & & & \\ 0 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{vmatrix}_{n+1} + 0$$

$$= 2D_{n+1} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & & & \\ 0 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{vmatrix}_{n+1}.$$

On développe par rapport à la première colonne :

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & & & \\ 0 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{vmatrix}_{n+1} = (-1)^{1+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & & (0) \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & -1 & 2 \end{vmatrix}_n + 0 = -D_n.$$

On reporte ce résultat :

$$D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n.$$

b. On sait que $D_{n+2} - 2D_{n+1} + D_n = 0$ pour tout $n \geqslant 1$. On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$, c'est-à-dire $(r-1)^2 = 0$. Elle admet 1 comme racine double. On sait qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \quad : \quad D_n = (An + B)1^n = An + B.$$

On calcule que $D_1 = \det(2) = 2$ et $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$. On obtient

$$\begin{cases} A + B & = 2 \\ 2A + B & = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} A & = 1 \\ B & = 1. \end{cases}$$

Conclusion :

$$D_n = n + 1.$$

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\det A = D_n = n + 1 \neq 0$. Donc A est inversible.

Algèbre 64

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n.

1. Démontrer que : $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f \Longrightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.

2. ***a.*** Démontrer que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \iff \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.

b. Démontrer que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Longrightarrow E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

retour à la première page

1. On suppose que $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$. On montre que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.

$\boxed{\supset}$ Puisque $f(E) \subset E$, $\operatorname{Im}\left(f^2\right) = f\left(f\left(E\right)\right) \subset f\left(E\right) = \operatorname{Im}\left(f\right)$.

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in \operatorname{Im} f$. Il existe $x' \in E$ tel que $x = f(x')$. On décompose x' selon $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$. Il existe $x_i \in E$ et $x_k \in \operatorname{Ker} f$ tels que

$$x' = \underbrace{f(x_i)}_{\in \operatorname{Im} f} + \underbrace{x_k}_{\in \operatorname{Ker} f}.$$

On obtient

$$x = f(x') = f^2(x_i) + f(x_k) = f^2(x_i) \quad \text{donc} \quad x \in \operatorname{Im} f^2.$$

2. ***a.*** ▶ On connaît les inclusions usuelles

$$\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2.$$

L'espace vectoriel E étant de dimension finie, il s'agit de sous-espaces vectoriels de dimension finie. Une inclusion et l'égalité des dimensions assurent l'égalité, de sorte que

$$(1) \qquad \begin{cases} \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \iff \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Im} f^2 \\ \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2 \iff \dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Ker} f^2. \end{cases}$$

▶ D'après le théorème du rang appliqué à f et f^2 :

$$n = \dim E = \operatorname{rg} f + \dim \operatorname{Ker} f$$
$$n = \dim E = \operatorname{rg} f^2 + \dim \operatorname{Ker} f^2.$$

On en déduit que

$$(2) \quad \dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Ker} f^2 \iff n - \operatorname{rg} f = n - \operatorname{rg} f^2 \iff \operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f^2 \iff \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Im} f^2.$$

▶ Les équivalences (1) et (2) concluent.

b. On suppose que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$. D'après la question précédente, $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.

▶ *On montre que* $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$. Soit $x \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$.

Il existe $x' \in E$ tel que $x = f(x')$. De plus $f(x) = 0_E$, si bien que $f^2(x') = 0_E$. On trouve $x' \in \operatorname{Ker} f^2$, donc $x' \in \operatorname{Ker} f$. Finalement $x = f(x') = 0_E$.

▶ *On conclut.* En utilisant le théorème du rang, on sait que

$$\begin{cases} \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\} \\ \underbrace{\dim \operatorname{Im} f}_{=\operatorname{rg} f} + \dim \operatorname{Ker} f = \dim E. \end{cases}$$

Par caractérisation des supplémentaires en dimension finie :

$$\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f = E.$$

Algèbre 71

Soit p la projection de $\mathbb{R}^3$, sur le plan P d'équation $x + y + z = 0$, parallèlement à la droite D d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

a. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.

b. Soit $u = (x, y, z)$. Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

c. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

retour à la première page

L'équation $x + y + z = 0$ est une équation d'un hyperplan de $\mathbb{R}^3$: P est bien un plan vectoriel. On observe que $D = \operatorname{Vect}(\omega)$, où $\omega = (1, 2, 3)$: D est bien une droite vectorielle.

a. On sait que $\omega \notin P$ car $1 + 2 + 3 \neq 0_{\mathbb{K}}$. La droite vectorielle D n'est donc pas contenue dans l'hyperplan P. D'après le cours

$$P \oplus D = \mathbb{R}^3.$$

La projection p est donc bien définie. On sait que $D = \operatorname{Ker} p$ et $P = \operatorname{Im} p$.

b. • Notons $p(u) = (a, b, c)$. On sait que

$$p(u) \in P \quad \text{et} \quad u - p(u) \in D.$$

Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u - p(u) = \lambda\omega$, donc

$$(\star) \quad p(u) = u - \lambda\omega = (x - \lambda, y - 2\lambda, z - 3\lambda)\,.$$

Puisque $p(u) \in P$:

$$(x - \lambda) + (y - 2\lambda) + (z - 3\lambda) = 0$$
$$\lambda = \frac{1}{6}(x + y + z)$$

En reportant dans $(\star)$:

$$p(u) = \frac{1}{6}\,(5x - y - z, -2x + 4y - 2z, -3x - 3y + 3z)\,.$$

• Soit (e_1, e_2, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. La formule précédente donne après calcul

$$p(e_1) = \frac{5}{6}e_1 - \frac{2}{6}e_2 - \frac{3}{6}e_3$$
$$p(e_2) = -\frac{1}{6}e_1 + \frac{4}{6}e_2 - \frac{3}{6}e_3$$
$$p(e_3) = -\frac{1}{6}e_1 - \frac{2}{6}e_2 + \frac{3}{6}e_3.$$

Ainsi

$$\operatorname{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(p) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

c. Notons $u=(x,y,z)$. Alors

$$u\in P \iff z=-x-y \iff u=(x,y,-x-y) \iff u=x(1,0,-1)+y(0,1,-1).$$

Notons $\omega_2=(1,0,-1)$ et $\omega_3=(0,1,-1)$. On vient de voir que

$$P=\mathrm{Vect}(\omega_2,\omega_3).$$

Or $\dim P=2$, donc (ω_2,ω_3) est une base de P (famille génératrice de 2 vecteurs). On connaît la base (ω) de D. On sait que $D\oplus P=\mathbb{R}^3$. Une base adaptée à cette somme directe est $(\omega,\omega_2,\omega_3)$. Par définition d'une projection :

$$\begin{aligned} p(\omega)&=0_E \quad \text{car } \omega\in D\\ p(\omega_2)&=\omega_2 \quad \text{car } \omega_2\in P\\ p(\omega_3)&=\omega_3 \quad \text{car } \omega_3\in P. \end{aligned}$$

La matrice de p dans la base $(\omega,\omega_2,\omega_3)$ est

$$\mathrm{Mat}_{(\omega,\omega_2,\omega_2)}(p)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Algèbre 76

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\ |\ )$.
On pose $\forall x\in E$, $\|x\|=\sqrt{(x\mid x)}$.

1. ***a.*** Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

b. Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.

2. Soit

$$E=\left\{f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \mid f>0\right\}.$$

Prouver que l'ensemble $\left\{\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\times\int_a^b\frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t \;\middle|\; f\in E\right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

retour à la première page

1. ***a.*** Cours.

b. Cours.

2. Notons

$$A=\left\{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\times\int_a^b\frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t \;\middle|\; f\in E\right\}.$$

On utilise le produit scalaire usuel sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ défini par $\langle f,g\rangle=\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. Soit $f\in E$. Puisque $f>0$, les fonctions $\sqrt{f}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{f}}$ sont définies et continues sur $[a,b]$. On sait que

$$\begin{aligned} \left\langle\sqrt{f},\frac{1}{\sqrt{f}}\right\rangle&=\int_a^b\sqrt{f(t)}\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\,\mathrm{d}t=b-a\\ \left\|\sqrt{f}\right\|^2&=\int_a^b\left(\sqrt{f(t)}\right)^2\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\\ \left\|\frac{1}{\sqrt{f}}\right\|^2&=\int_a^b\left(\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\right)^2\mathrm{d}t=\int_a^b\frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Élevée au carré, la fameuse inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\left\langle\sqrt{f},\frac{1}{\sqrt{f}}\right\rangle^2\leqslant\left\|\sqrt{f}\right\|^2\left\|\frac{1}{\sqrt{f}}\right\|^2.$$

Autrement dit
$$(b-a)^2 \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t.$$
On en déduit que
$$\boxed{A \text{ est minorée par } (b-a)^2}.$$
Il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si $\sqrt{f} = \lambda \cdot \dfrac{1}{\sqrt{f}}$ où λ est une constante. Cela laisse $f = \lambda$. En prenant f constante égale à 1, on observe que $f \in E$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t = (b-a)^2$. Ainsi
$$\boxed{(b-a)^2 \in A}.$$
Conclusion : A admet $(b-a)^2$ pour minimum. En particulier $m = \inf A = (b-a)^2$.

Algèbre 77

Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E. Démontrer que $\left(A^\perp\right)^\perp = A$.

2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

- ***a.*** Démontrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
- ***b.*** Démontrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

retour à la première page

1. • Puisque A et $A^\perp$ sont de dimension finie, on sait que
$$A \overset{\perp}{\oplus} A^\perp = E \quad \text{et} \quad A^\perp \overset{\perp}{\oplus} A^{\perp\perp} = E.$$
L'espace euclidien E étant de dimension finie, on en déduit que
$$\dim A = \dim A^{\perp\perp} = \dim E - \dim A^\perp.$$
• Les dimensions étant égales, il suffit de montrer que $A \subset A^{\perp\perp}$. Soit $x \in A$. Par définition de $A^\perp$, x est orthogonal à tous les vecteurs de $A^\perp$:
$$\forall a \in A^\perp \quad : \quad \langle x, a\rangle = 0_{\mathbb{R}}.$$
Cela signifie que $x \in A^{\perp\perp}$.

2. ***a.*** On montre que
$$(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$$
$\boxed{\subset}$ Soit $x \in (F+G)^\perp$. Le vecteur x est orthogonal à tous les vecteurs de $F+G$. Or $F \subset F+G$ et $G \subset F+G$. Donc x est orthogonal à tous les vecteurs de F et x est orthogonal à tous les vecteurs de G. Autrement dit, $x \in F^\perp$ et $x \in G^\perp$. Conclusion :
$$x \in F^\perp \cap G^\perp.$$
$\boxed{\supset}$ Soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$. Soit $z \in F+G$. Il existe $z_F \in F$ et $z_G \in G$ tels que
$$z = z_F + z_G.$$
Alors
$$\langle x, z\rangle = \left\langle \underbrace{x}_{\in F^\perp}, \underbrace{z_F}_{\in F} \right\rangle + \left\langle \underbrace{x}_{\in G^\perp}, \underbrace{z_G}_{\in G} \right\rangle = 0_{\mathbb{R}} + 0_{\mathbb{R}} = 0_{\mathbb{R}}.$$
On a montré que
$$\forall z \in F+G \quad : \quad \langle x, z\rangle = 0_{\mathbb{R}},$$
c'est-à-dire
$$x \in (F+G)^\perp.$$

b. D'après la questions ***a*** appliquée aux sous-espaces vectoriels $F^\perp$ et $G^\perp$:

$$\left(F^\perp + G^\perp\right)^\perp = F^{\perp\perp} \cap G^{\perp\perp}.$$

D'après la question ***1***

$$\left(F^\perp + G^\perp\right)^\perp = F \cap G.$$

Donc

$$\left(F^\perp + G^\perp\right)^{\perp\perp} = (F \cap G)^\perp .$$

D'après la question ***1***

$$F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp .$$

Algèbre 78

Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E. On note $(x \mid y)$ le produit scalaire de x et de y et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

1. Soit u un endomorphisme de E, tel que : $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$.

a. Démontrer que : $\forall (x,y) \in E^2,\ (u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$.

b. Démontrer que u est bijectif.

2. Démontrer que l'ensemble $\mathrm{O}(E)$ des isométries vectorielles de E, muni de la loi $\circ$, est un groupe.

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Prouver que : $u \in \mathrm{O}(E) \iff (u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormée.

retour à la première page

1. ***a.*** Par polarisation et linéarité de u,

$$(u(x) \mid u(y)) = \frac{1}{2}\left(\|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|u(x+y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2\right).$$

L'endomorphisme u conserve la norme, donc

$$(u(x) \mid u(y)) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) = (x \mid y).$$

b. Soit $x \in \operatorname{Ker} u$. Alors $\|x\| = \|u(x)\| = \|0_E\| = 0_\mathbb{R}$, donc $x = 0_E$. Ainsi $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$, si bien que u est injectif. Puisque E est de dimension finie, on sait que u est bijectif.

2. • On a vu que $\mathrm{O}(E) \subset GL(E)$. On montre que $\mathrm{O}(E)$ est un sous-groupe du groupe $(GL(E), \circ)$.

• Il est clair que Id_E est un endomorphisme de E qui conserve la norme. Donc $\mathrm{Id}_E \in \mathrm{O}(E)$.

• Soient $u, v \in \mathrm{O}(E)$. Puisque u et v conservent la norme,

$$\left\|u\left(v^{-1}(x)\right)\right\| = \left\|v^{-1}(x)\right\| = \left\|v\left(v^{-1}(x)\right)\right\| = \|x\|.$$

L'endomorphisme $u \circ v^{-1}$ conserve la norme, donc $u \circ v^{-1} \in \mathrm{O}(E)$.

3. • Supposons $u \in \mathrm{O}(E)$. D'après ***1a***, u conserve le produit scalaire. Donc

$$(u(e_i) \mid u(e_j)) = (e_i \mid e_j) = \delta_{i,j}.$$

La famille $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une famille orthonormée de n vecteurs de E et $\dim E = n$. Donc $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

• Supposons que $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E. Montrons que l'endomorphisme u conserve la norme. Soit $x \in E$ que l'on décompose dans la base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$:

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

Par calcul de la norme en base othonormée :

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Par linéarité de u
$$u(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i).$$
Or $(u(e_1),\dots,u(e_n))$ est une base orthonormée de E. Par calcul de la norme en base othonormée :
$$\|u(x)\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$
On a bien montré que
$$\forall x\in E \quad : \quad \|u(x)\|=\|x\|,$$
c'est-à-dire $u\in \mathrm{O}(E)$.

Algèbre 79

Soit a et b deux réels tels que $a<b$.

a. Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer que
$$\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t=0 \implies h=0.$$

b. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose $\forall (f,g)\in E^2$, $(f\mid g)=\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$. Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

c. Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\,\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

retour à la première page

a. *C'est une propriété du cours. Pour le plaisir, donnons-en une preuve différente de celle du cours.* On suppose $\displaystyle\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t=0$ et on définit
$$F:\ \begin{array}{ccc}[a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t.\end{array}$$
Puisque h est <u>continue</u>, le théorème fondamental assure que F est $\mathcal{C}^1$ et $F'=h\geqslant 0$. Ainsi F est croissante sur $[a,b]$. Or $F(a)=0$ et $F(b)=\displaystyle\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t=0$. La croissance de F impose $F=0$ sur $[a,b]$. En dérivant on obtient $F'=h=0$. Olé !

b. Cours.

c. Sur $[0,1]$, on définit les fonctions $f\colon x\mapsto\sqrt{x}$ et $g\colon x\mapsto e^{-x}$. Ces deux fonctions sont continues. Pour le produit scalaire défini en ***b*** :
$$(f\mid g)=\int_0^1\sqrt{x}e^{-x}\,\mathrm{d}x$$
$$\|f\|^2=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$
$$\|g\|^2=\int_0^1 e^{-2x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(1-e^{-2}\right).$$
La fameuse inégalité de Cauchy-Schwarz assure que
$$|(f\mid g)|\leqslant \|f\|\,\|g\|,$$
ce qui laisse
$$\int_0^1\sqrt{x}e^{-x}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{1-e^{-2}}.$$
Cela n'a aucun intérêt.

Algèbre 80

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a. Démontrer que $\langle f, g\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.

b. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f\colon x \mapsto \cos x$ et $g\colon x \mapsto \cos(2x)$. Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u\colon x \mapsto \sin^2 x$.

retour à la première page

a. Soient $f, g, h \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- La fonction $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est bien définie et à valeurs réelles.
- Il est évident que $\langle g, f\rangle = \langle f, g\rangle$. La fonction $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est symétrique.
- Par linéarité de l'intégrale

$$\langle \lambda f + \mu g, h\rangle = \lambda\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)h(t)\,\mathrm{d}t + \mu\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)h(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\,\langle f, h\rangle + \mu\,\langle g, h\rangle\,.$$

La fonction $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est linéaire à gauche, donc bilinéaire par symétrie.

- Par positivité de l'intégrale,

$$\langle f, f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{f(t)^2}_{\geqslant 0}\,\mathrm{d}t \geqslant 0_{\mathbb{R}}.$$

- Supposons que $\langle f, f\rangle = 0_{\mathbb{R}}$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)^2\,\mathrm{d}t = 0_{\mathbb{R}}.$$

La fonction f^2 est CONTINUE, positive et d'intégrale nulle sur $[0, 2\pi]$. Par théorème :

$$\forall t \in [0, 2\pi] \quad : \quad f(t)^2 = 0_{\mathbb{R}}.$$

Ainsi $f(t) = 0$ sur $[0, 2\pi]$. Par 2π-périodicité de f,

$$f = 0_E.$$

La fonction $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie-positive.

b. On sait bien que

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x).$$

Ainsi

$$u = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}g.$$

- On montre que $\dfrac{1}{2} \in F^\perp$. On calcule :

$$\left\langle \frac{1}{2}, f\right\rangle = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \cos t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi}\left[\sin t\right]_0^{2\pi} = 0_{\mathbb{R}}$$
$$\left\langle \frac{1}{2}, g\right\rangle = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \cos(2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{2\pi} = 0_{\mathbb{R}}.$$

Ainsi

$$\frac{1}{2} \in \{f; g\}^\perp$$
$$\frac{1}{2} \in \mathrm{Vect}(f, g)^\perp$$
$$\frac{1}{2} \in F^\perp.$$

- Résumons :

$$u = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\in F^\perp} - \underbrace{\frac{1}{2}g}_{\in F}\,.$$

Il en résulte immédiatement que

$$p_F(u) = -\frac{1}{2}g.$$

Algèbre 81

On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \operatorname{tr}\left({}^tAA'\right)$, où $\operatorname{tr}({}^tAA')$ désigne la trace du produit de la matrice ${}^tA$ par la matrice A'. On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

a. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b. Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.

c. Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.

d. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

retour à la première page

a. On observe que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car

$$\mathcal{F} = \operatorname{Vect}(I_2, K) \quad \text{où} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$M \in \mathcal{F}^\perp \iff M \in \{I_2; K\}^\perp \iff \varphi(M, I_2) = 0_{\mathbb{R}} \text{ et } \varphi(M, K) = 0_{\mathbb{R}}.$$

Or

$$\varphi(M, I_2) = \operatorname{tr}\left({}^tMI_2\right) = a + d$$
$$\varphi(M, K) = \operatorname{tr}\left({}^tMK\right) = b - c.$$

Ainsi

$$M \in \mathcal{F}^\perp \iff d = -a \text{ et } c = b \iff M = a\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=A} + b\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=B}.$$

Il reste

$$\mathcal{F}^\perp = \operatorname{Vect}(A, B).$$

La famille (A, B) est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires (*ce critère n'est valable que pour une famille de deux vecteurs*).

$$(A, B) \text{ est une base de } \mathcal{F}^\perp.$$

c. On remarque que

$$J = \underbrace{I_2}_{\in \mathcal{F}} + \underbrace{B}_{\in \mathcal{F}^\perp}.$$

Donc

$$p_{\mathcal{F}^\perp}(J) = B \quad \text{et} \quad p_{\mathcal{F}}(J) = I_2.$$

d. On sait que

$$d(J, \mathcal{F}) = \|J - p_{\mathcal{F}}(J)\| = \|J - I_2\| = \|B\| = \sqrt{\operatorname{tr}\left({}^tBB\right)} = \sqrt{2}.$$

Algèbre 82

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$. On admet que pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $\langle A, A' \rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$.

a. Démontrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b. Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

retour à la première page

a. *On pourrait reconnaître le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^{[\![1,2]\!]^2}$, mais comme il n'y a que ça à faire dans cet exercice, on va vérifier que la définition d'un produit scalaire est satisfaite.*

On note $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$, $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in E$, $A'' = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} \in E$ et $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2$.

- La fonction $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien définie et <u>à valeurs réelles</u>.
- Il est évident que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est <u>symétrique</u> par commutativité du produit des réels.
- On observe que

$$\begin{aligned}\langle \lambda A + \lambda' A, A'' \rangle &= (\lambda a + \lambda' a')a'' + (\lambda b + \lambda' b')b'' + (\lambda c + \lambda' c')c'' + (\lambda d + \lambda' d')d'' \\ &= \lambda(aa'' + bb'' + cc'' + dd'') + \lambda'(a'a'' + b'b'' + c'c'' + d'd'') \\ &= \lambda \langle A, A'' \rangle + \lambda' \langle A', A'' \rangle .\end{aligned}$$

Ainsi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche, et donc <u>bilinéaire</u> par symétrie.

- On remarque que

$$\langle A, A \rangle = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant 0_{\mathbb{R}},$$

car les carrés des réels sont positifs.

- Supposons que $\langle A, A \rangle = 0_{\mathbb{R}}$:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0_{\mathbb{R}}.$$

Une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si ses termes sont nuls, donc

$$a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = 0_{\mathbb{R}},$$

c'est-à-dire $a = b = c = d = 0_{\mathbb{R}}$ et donc

$$A = \mathbb{O}_{2,2}.$$

Ainsi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est <u>défini-positif</u>.

b. On observe que

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=T} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=S}.$$

Il est clair que $T \in F$. Enfin, $S \in F^{\perp}$ car pour tout $(a, b, d) \in \mathbb{R}^3$

$$\left\langle S, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \cdot a + 0 \cdot b + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot d = 0_{\mathbb{R}}.$$

Ainsi le projeté orthogonal de A sur F est

$$p_F(A) = T.$$

Alors

$$d(A, F) = \|A - P_F(A)\| = \|A - T\| = \|S\| = 1.$$

Algèbre 84

a. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).

b. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.

c. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z + i)^n = (z - i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

retour à la première page

a. Soit z un complexe non nul. Posons $z = x + iy$ avec x et y réels. Un argument de z est un réel θ tel que $\dfrac{z}{|z|} = e^{i\theta}$ avec $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

b. Soit $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On a $z^n = 1 \iff \begin{cases} r^n = 1 \\ n\theta = 0 \mod 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \dfrac{2k\pi}{n} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$. Les réels $\dfrac{2k\pi}{n}$, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, sont deux à deux distincts et $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\dfrac{2k\pi}{n} \in [0, 2\pi[$. Or $\begin{array}{ccc} [0, 2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \theta & \longmapsto & e^{i\theta} \end{array}$ est injective. Donc, $\left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \text{ avec } k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$ est constitué de n solutions distinctes de l'équation $z^n = 1$. Les solutions de l'équation $z^n = 1$ étant également racines du polynôme $X^n - 1$ de degré n, il ne peut y en avoir d'autres. Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation $z^n = 1$ est $S = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \text{ avec } k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$.

c. Le complexe $z = i$ n'étant pas solution de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$,

$$\begin{aligned}(z+i)^n = (z-i)^n \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists\, k \in [\![0, n-1]\!] \text{ tel que } \frac{z+i}{z-i} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists\, k \in [\![0, n-1]\!] \text{ tel que } z\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = -i\left(1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\end{aligned}.$$

En remarquant que $z\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = -i\left(1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$ n'admet pas de solution pour $k = 0$, on en déduit que :

$$(z+i)^n = (z-i)^n \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, k \in [\![1, n-1]\!] \text{ tel que } z = i\,\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1}{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}.$$

En écrivant $i\,\dfrac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1}{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1} = i\,\dfrac{e^{\frac{ik\pi}{n}} + e^{-\frac{ik\pi}{n}}}{e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{-\frac{ik\pi}{n}}} = i\,\dfrac{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \dfrac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$, on voit que les solutions sont des réels.
On pouvait aussi voir que si z est solution de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ alors $|z+i| = |z-i|$ et donc le point d'affixe z appartient à la médiatrice de $[A, B]$, A et B étant les points d'affixes respectives i et $-i$, c'est-à-dire à la droite des réels.

Algèbre 85

a. Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.

i) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $\left(1, X-a, (X-a)^2, \dots, (X-a)^n\right)$.

ii) Soit $r \in \mathbb{N}^\star$. En déduire que a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in [\![0, r-1]\!]$, $P^{(k)}(a) = 0$.

b. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme

$$P = X^5 + aX^2 + bX.$$

Factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

retour à la première page

a. $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$.

b.

$$\begin{aligned} a \text{ est une racine d'ordre } r \text{ de } P \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists Q \in \mathbb{R}_{n-r}[X] \text{ tel que } Q(a) \neq 0 \text{ et } P = (X-a)^r Q \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists\,(q_0, \dots, q_{n-r}) \in \mathbb{R}^{n-r+1} \text{ tel que } q_0 \neq 0 \text{ et } P = (X-a)^r \sum_{i=0}^{n-r} q_i (X-a)^i \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists\,(q_0, \dots, q_{n-r}) \in \mathbb{R}^{n-r+1} \text{ tel que } q_0 \neq 0 \text{ et } P = \sum_{i=0}^{n-r} q_i (X-a)^{r+i} \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists\,(q_0, \dots, q_{n-r}) \in \mathbb{R}^{n-r+1} \text{ tel que } q_0 \neq 0 \text{ et } P = \sum_{k=r}^{n} q_{k-r} (X-a)^k \end{aligned}$$

D'après la formule de Taylor et l'unicité de la décomposition de P dans la base $(1, (X-a), \dots, (X-a)^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ il vient enfin :

$$a \text{ est une racine d'ordre } r \text{ de } P \quad \Longleftrightarrow \quad \forall k \in \{0, \dots, r-1\} \quad P^{(k)}(a) = 0 \text{ et } P^{(r)}(a) \neq 0$$

c. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} 1 \text{ est racine double de } P = X^5 + aX^2 + bX &\iff P(1) = P'(1) = 0 \text{ et } P''(1) \neq 0 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{c} 1 + a + b = 0 \\ 5 + 2a + b = 0 \\ 20 + 2a \neq \end{array} \right. \\ &\iff a = -4 \text{ et } b = 3 \end{aligned}$$

On obtient $X^5 - 4X^2 + 3X = X(X-1)^2(X^2 + 2X + 3)$ et c'est la factorisation cherchée car le discriminant de $X^2 + 2X + 3$ est strictement négatif.

Algèbre 86

1. Soit $(a, b, p) \in \mathbb{Z}^3$. Prouver que : si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, alors $p \wedge (ab) = 1$.

2. Soit p un nombre premier.

- ***a.*** Prouver que $\forall k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k} k!$ puis en déduire que p divise $\binom{p}{k}$.
- ***b.*** Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n^p \equiv n\ [p]$. **Indication** : procéder par récurrence.
- ***c.*** En déduire, pour tout entier naturel n, que : p ne divise pas $n \implies n^{p-1} \equiv 1\ [p]$.

retour à la première page

1. D'après le théorème de Bézout,

$$\exists (u_1, v_1) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que } u_1 p + v_1 a = 1. \ (1)$$
$$\exists (u_2, v_2) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que } u_2 p + v_2 b = 1. \ (2)$$

En multipliant les équations (1) et (2), on obtient $(u_1 u_2 p + u_1 v_2 b + u_2 v_1 a)p + (v_1 v_2)(ab) = 1$. Donc, d'après le théorème de Bézout, $p \wedge (ab) = 1$.

2. ***a.*** $\left(\begin{array}{c} p \\ k \end{array} \right) = \dfrac{p!}{k!(p-k)!} = \dfrac{p(p-1)...(p-k+1)}{k!}$. Donc $\binom{p}{k} k! = p(p-1)...(p-k+1)$. Donc

$$p \mid \binom{p}{k} k!. \ (3)$$

Or, $\forall k \in [\![1, p-1]\!]$, $p \wedge k = 1$ (car p est premier) donc, d'après 1.(a), $p \wedge k! = 1$. Donc, d'après le lemme de Gauss, (3) $\implies p \mid \binom{p}{k}$.

b. Procédons par récurrence sur n.
Pour $n = 0$ et pour $n = 1$, la propriété est vérifiée.
Supposons que la propriété (P_n) : $n^p \equiv n \mod p$ soit vérifiée au rang n. Alors, d'après la formule du binôme de Newton,

$$(n+1)^p = n^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} n^k + 1. \ (4)$$

Or, $\forall k \in [\![1, p-1]\!]$, $p \mid \binom{p}{k}$ donc $p \mid \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} n^k$. Donc d'après (4) et (P_n), $(n+1)^p \equiv n + 1 \mod p$ et (P_{n+1}) est vraie.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que p ne divise pas n. Comme p est premier, alors $p \wedge n = 1$. La question précédente donne p divise $n^p - n = n(n^{p-1} - 1)$. Or comme p est premier avec n, on en déduit, d'après le lemme de Gauss, que p divise $n^{p-1} - 1$. Ce qui signifie que $n^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

Algèbre 87

Soient $a_0, \cdots, a_n$ $n+1$ réels deux à deux distincts.

a. Montrer que si $b_0, b_1, \cdots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant

$$\deg P \leqslant n \text{ et } \forall i \in [\![0, n]\!],\ P(a_i) = b_i.$$

b. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Expliciter ce polynôme, que l'on notera L_k, lorsque

$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ b_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq k \\ 1 & \text{si} \quad i = k \end{cases}$$

c. Prouver que $\forall p \in [\![0, n]\!],\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p.$

retour à la première page

a. L'application $u\colon \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(a_0), P(a_1), \cdots, P(a_n)) \end{array}$ est linéaire.

Montrons que $\operatorname{Ker} u = \{0\}$. Si $P \in \operatorname{Ker} u$, alors $P(a_0) = P(a_1) = \cdots = P(a_n) = 0$ et le polynôme P, de degré inférieur ou égal à n, admet $n+1$ racines distinctes. Donc $P = 0$.

Ainsi u est injective et comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1 = \dim \mathbb{R}^{n+1}$, u est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Enfin les conditions recherchées sont équivalentes à : $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $u(P) = (b_0, \ldots, b_n)$. La bijectivité de u dit que ce problème admet une unique solution P et on a $P = u^{-1}((b_0, \ldots, b_n))$.

b. Pour ce choix de $b_0, b_1, \cdots, b_n$ le polynôme L_k vérifie les conditions :

$$\deg L_k \leqslant n \text{ et } \forall i \in [\![0, n]\!],\ L_k(a_i) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq k \\ 1 & \text{si} \quad i = k \end{cases}.$$

Comme $a_0, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n$ sont n racines distinctes de L_k qui est de degré $\leqslant n$, il existe nécessairement $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$L_k = \lambda \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (X - a_i)$$

La condition supplémentaire $L_k(a_k) = 1$ donne $\lambda = \dfrac{1}{\displaystyle\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (a_k - a_i)}$ et finalement :

$$L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}$$

c. Soit $p \in [\![0, \ldots, n]\!]$. Les polynômes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k$ et X^p vérifient les mêmes conditions d'interpolation :

$$\deg P \leqslant n \quad \text{et} \quad \forall i \in \{0, \cdots, n\} \quad P(a_i) = a_i^p$$

Par l'unicité vue en première question, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

Algèbre 89

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

a. On suppose $k \in [\![1, n-1]\!]$.
Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.

b. On pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)}$.

retour à la première page

a. $z^k - 1 = e^{i\frac{k2\pi}{n}} - 1 = e^{i\frac{k\pi}{n}}\left(e^{i\frac{k\pi}{n}} - e^{-i\frac{k\pi}{n}}\right) = e^{i\frac{k\pi}{n}} 2i \sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$, c'est-à-dire

$$z^k - 1 = 2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\, e^{i\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a $0 < \dfrac{k\,\pi}{n} < \pi$, donc $\sin\left(\dfrac{k\,\pi}{n}\right) > 0$.

Donc le module de $z^k - 1$ est $2\,\sin\left(\dfrac{k\,\pi}{n}\right)$ et un argument de $z^k - 1$ est $\dfrac{k\pi}{n} + \dfrac{\pi}{2}$.

b. On remarque que pour $k = 0$, $\left|z^k - 1\right| = 0$ et $\sin\left(\dfrac{k\,\pi}{n}\right) = 0$. Donc d'après la question précédente, on a

$$S = 2\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\,\pi}{n}\right).$$

Le nombre S est donc la partie imaginaire de $T = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}}$. Or, comme $e^{i\frac{\pi}{n}} \neq 1$, on a

$$T = 2\frac{1 - e^{i\pi}}{1 - e^{i\frac{\pi}{n}}} = \frac{4}{1 - e^{i\frac{\pi}{n}}}.$$

Or $1 - e^{i\frac{\pi}{n}} = e^{i\frac{\pi}{2n}}\left(e^{-i\frac{\pi}{2n}} - e^{i\frac{\pi}{2n}}\right) = -2ie^{i\frac{\pi}{2n}} \sin\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$. On en déduit que

$$T = \frac{4e^{-i\frac{\pi}{2n}}}{-2i\,\sin\frac{\pi}{2n}} = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{2n}}\; i\, e^{-i\frac{\pi}{2n}}.$$

En isolant la partie imaginaire de T, et comme $\cos\left(\dfrac{\pi}{2n}\right) \neq 0$ ($n \geqslant 2$), on en déduit que

$$S = \frac{2}{\tan\frac{\pi}{2n}}.$$

Algèbre 90

$\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes. Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.

1. Montrer que $\begin{array}{cccc} \Phi : & \mathbb{K}_2[X] & \to & \mathbb{K}^3 \\ & P & \mapsto & (P(a_1), P(a_2), P(a_3)) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1; 2; 3\}$, $L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.

  a. Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

  b. Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.

3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).

4. **Application** : on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0, 1)$, $B(1, 3)$ et $C(2, 1)$. Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.

retour à la première page

1. ▶ Si $a \in \mathbb{K}$, l'application $P \in \mathbb{K}_2[X] \mapsto P(a) \in \mathbb{K}$ est linéaire. Il est alors évident que Φ est linéaire.

▶ On montre que $\operatorname{Ker} \Phi = \{0\}$. Soit $P \in \operatorname{Ker} \Phi$. Alors $P \in \mathbb{K}_2[X]$ et $P(a_1) = P(a_2) = P(a_3) = 0$. Le polynôme P admet au moins 3 racines distinctes et $\deg P \leqslant 2$. Cela impose $P = 0$.

▶ L'application Φ est linéaire et injective entre $\mathbb{K}_2[X]$ et $\mathbb{K}^3$. De plus, $\dim \mathbb{K}_2[X] = \dim \mathbb{K}^3 = 3$. On sait alors que Φ est un isomorphisme.

2. **a.** L'application Φ^{-1} est également un isomorphisme d'espaces vectoriels. L'image d'une base par un isomorphisme est une base. Donc (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

b. ▶ On sait que $\Phi(L_1) = (L_1(a_1), L_1(a_2), L_1(a_3)) = e_1 = (1, 0, 0)$. Puisque $L_1(a_2) = L_1(a_3) = 0$ et $a_2 \neq a_3$, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$L_1(X) = (X - a_2)(X - a_3)Q(X).$$

Or $\deg L_1 \leqslant 2$, donc $\deg Q \leqslant 0$: Q est constant. Notons c cette constante :

$$L_1(X) = c(X - a_2)(X - a_3).$$

On évalue en a_1 et on utilise $L_1(a_1) = 1$ pour trouver $c = \dfrac{1}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}$:

$$L_1(X) = \frac{(X - a_2)(X - a_3)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}.$$

▶ De même

$$L_2(X) = \frac{(X - a_1)(X - a_3)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)} \quad \text{et} \quad L_3(X) = \frac{(X - a_1)(X - a_2)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}.$$

3. Notons $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3) de $\mathbb{K}_2[X]$:

$$P(X) = \lambda_1 L_1(X) + \lambda_2 L_2(X) + \lambda_3 L_3(X).$$

On évalue en a_1, sachant que $L_1(a_1) = 1$ et $L_2(a_1) = L_3(a_1) = 0$:

$$P(a_1) = \lambda_1.$$

On obtient de même $\lambda_2 = P(a_2)$ et $\lambda_3 = P(a_3)$:

$$P(X) = P(a_1)L_1(X) + P(a_2)L_2(X) + P(a_3)L_3(X).$$

4. On prend $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_3 = 2$. On cherche $P \in \mathbb{K}_2[X]$ tel que $(P(a_1), P(a_2), P(a_3)) = (1, 3, 1)$. L'existence et l'unicité de P sont assurées car Φ est un isomorphisme. La question précédente donne

$$\begin{aligned} P(X) &= P(0)L_1(X) + P(1)L_2(X) + P(2)L_3(X) \\ &= 1 \cdot \frac{(X-1)(X-2)}{(0-1)(0-2)} + 3 \cdot \frac{X(X-2)}{(1-0)(1-2)} + \frac{X(X-1)}{(2-0)(2-1)} \\ &= -2X^2 + 4X + 1. \end{aligned}$$

Algèbre 92

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.
On pose : $\forall (A, B) \in E^2,\ \langle A, B \rangle = \operatorname{tr}\left({}^tAB\right)$ où tr désigne la trace et ${}^tA$ désigne la transposée de la matrice A.

1. Prouver que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E. Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque ${}^tA = -A$. On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E. On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
   a. Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
   b. Prouver que $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$.
3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E. Déterminer $F^\perp$.

retour à la première page

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On observe que

$$\langle A, B\rangle = \sum_{j=1}^{n} \left[{}^t\!AB\right]_{j,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \left[{}^t\!A\right]_{j,i} [B]_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} b_{i,j}.$$

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une famille $(m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathbb{R}^{[\![1,n]\!]^2}$. On reconnaît le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^{[\![1,n]\!]^2}$. La fonction $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est donc une produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. ***a.*** On considère

$$T : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & {}^t\!M. \end{array}$$

Par linéarité de la transposition, T est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il est clair que $T \circ T = \mathrm{Id}$. Alors T est une symétrie. Dans ce cas, on sait que

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}\,(T - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}\,(T + \mathrm{Id})\,.$$

Or

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\,(T - \mathrm{Id}) &= \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid T(M) = M\} = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; {}^t\!M = M\right\} = S_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{Ker}\,(T + \mathrm{Id}) &= \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid T(M) = -M\} = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; {}^t\!M = -M\right\} = A_n(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Par conséquent $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R}).$$

b. • On montre que

$$S_n(\mathbb{R}) \subset A_n(\mathbb{R})^{\perp}.$$

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. Pour toute matrice $A \in A_n(\mathbb{R})$:

$$\langle S, A\rangle = \mathrm{tr}\left({}^t\!SA\right) = \mathrm{tr}\,(SA) = \mathrm{tr}(AS) = \mathrm{tr}\left(-\,{}^t\!AS\right) = -\,\mathrm{tr}\left({}^t\!AS\right) = -\langle A, S\rangle = -\langle S, A\rangle\,.$$

On en déduit que $2\langle S, A\rangle = 0_{\mathbb{R}}$ et donc $\langle S, A\rangle = 0_{\mathbb{R}}$. Ainsi

$$\forall A \in A_n(\mathbb{R}) \quad : \quad \langle S, A\rangle = 0_{\mathbb{R}},$$

c'est-à-dire

$$S \in A_n(\mathbb{R})^{\perp}.$$

• On sait que

$$E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad E = A_n(\mathbb{R})^{\perp} \overset{\perp}{\oplus} A_n(\mathbb{R}).$$

Puisque E est de dimension finie :

$$\dim S_n(\mathbb{R}) = \dim A_n(\mathbb{R})^{\perp} = \dim E - \dim A_n(\mathbb{R}).$$

• Une inclusion et l'égalité des dimensions suffisent :

$$S_n(\mathbb{R}) = A_n(\mathbb{R})^{\perp}.$$

3. En notant $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$F = \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2}, \ldots, E_{n,n}).$$

Ainsi

$$M \in F^{\perp} \iff M \in \{E_{1,1}; E_{2,2}; \ldots; E_{n,n}\}^{\perp} \iff \forall k \in [\![1, n]\!],\ \langle M, E_{k,k}\rangle = 0_{\mathbb{R}}.$$

On a vu que

$$\langle A, B\rangle = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} a_{i,j} b_{i,j},$$

donc

$$\langle M, E_{k,k}\rangle = m_{k,k}.$$

Il reste

$$M \in F^{\perp} \iff \forall k \in [\![1, n]\!],\ m_{k,k} = 0_{\mathbb{R}}.$$

Conclusion :

$$F^{\perp} \text{ est l'ensemble des matrices de diagonale nulle.}$$

Algèbre 94

a. Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.

b. Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux. Soit $c \in \mathbb{N}$.
Prouver que : $(a \mid c \text{ et } b \mid c) \iff ab \mid c$.

c. On considère le système (S) : $\left\{\begin{array}{lll} x & \equiv & 6\ [17] \\ x & \equiv & 4\ [15] \end{array}\right.$ où l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.

i) Déterminer une solution particulière x_0 de (S).

ii) *Déduire des questions précédentes* la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S).

retour à la première page

a. Théorème de Bézout :

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

$$a \wedge b = 1 \iff \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 \ / \ au + bv = 1.$$

b. Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$. On suppose que $a \wedge b = 1$. Soit $c \in \mathbb{N}$. Prouvons que $ab \mid c \iff a \mid c \text{ et } b \mid c$.
Si $ab \mid c$ alors $\exists k \in \mathbb{Z} \ / \ c = kab$. Alors, $c = (kb)a$ donc $a \mid c$ et $c = (ka)b$ donc $b \mid c$.
Prouvons que $(a \mid c \text{ et } b \mid c) \implies ab \mid c$. On suppose que $a \wedge b = 1$, donc

$$\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 \ / \ au + bv = 1. \quad (1)$$

De plus $a \mid c$ donc

$$\exists k_1 \in \mathbb{Z} \ / \ c = k_1 a. \quad (2)$$

De même, $b \mid c$ donc

$$\exists k_2 \in \mathbb{Z} \ / \ c = k_2 b. \quad (3)$$

On multiplie (1) par c et on obtient $cau + cbv = c$. Alors, d'après (2) et (3), $(k_2 b)au + (k_1 a)bv = c$, donc $(k_2 u + k_1 v)(ab) = c$ et donc $ab \mid c$.
On a donc prouvé que $(a \mid c \text{ et } b \mid c) \iff ab \mid c$.

c. *i)* **Première méhode** (méthode générale). Soit $x \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} x \ \text{ solution de}(S) &\iff \exists (k, k') \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que } \left\{\begin{array}{l} x = 6 + 17k \\ x = 4 + 15k' \end{array}\right. \\ &\iff \exists (k, k') \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que } \left\{\begin{array}{l} x = 6 + 17k \\ 6 + 17k = 4 + 15k' \end{array}\right. \end{aligned}$$

Or $6 + 17k = 4 + 15k' \iff 15k' - 17k = 2$. Pour déterminer une solution particulière x_0 de (S), il suffit donc de trouver une solution particulière (k_0, k_0') de l'équation $15k' - 17k = 2$. Pour cela, cherchons d'abord, une solution de l'équation $15u + 17v = 1$. Les entiers 17 et 15 sont premiers entre eux. Déterminons alors un couple (u_0, v_0) d'entiers relatifs tel que $15u_0 + 17v_0 = 1$. On a : $17 = 15 \times 1 + 2$ puis $15 = 7 \times 2 + 1$. Alors $1 = 15 - 7 \times 2 = 15 - 7 \times (17 - 15 \times 1) = 15 - 17 \times 7 + 15 \times 7 = 15 \times 8 - 17 \times 7$. Donc $8 \times 15 + (-7) \times 17 = 1$. Ainsi, $16 \times 15 + (-14) \times 17 = 2$. On peut prendre alors $k_0' = 16$ et $k_0 = 14$. Ainsi, $x_0 = 6 + 17 \times k_0 = 6 + 17 \times 14 = 244$ est une solution particulière de (S).

Deuxième méthode. En observant le système (S), on peut remarquer que $x_0 = -11$ est une solution particulière. Cette méthode est évidemment plus rapide mais ne fonctionne pas toujours.

ii) On sait que x_0 est une solution particulière de (S) donc

$$\left\{\begin{array}{lll} x_0 & = & 6 \mod(17) \\ x_0 & = & 4 \mod(15) \end{array}\right. .$$

On en déduit que x solution de (S) si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{lll} x - x_0 & = & 0 \mod(17) \\ x - x_0 & = & 0 \mod(15) \end{array}\right. ,$$

c'est-à-dire : x solution de $(S) \iff (17 \mid x - x_0 \text{ et } 15 \mid x - x_0)$. Or $17 \wedge 15 = 1$ donc d'après 2., x solution de $(S) \iff (17 \times 15) \mid x - x_0$.
Donc l'ensemble des solutions de (S) est $\{x_0 + 17 \times 15k,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{244 + 255k,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Probabilités 95

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.

a. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

b. Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.

a. Déterminer la loi de X.

b. Déterminer la loi de Y.

retour à la première page

1. ***a.*** Les tirages se font avec remise. En toute indépendance, on répète donc 5 fois la même expérience de type succès/échec. Un succès est l'obtention d'une boule blanche. La probabilité d'un succès est $p = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.
On sait que

$$X \sim \mathcal{B}\left(5, \frac{1}{5}\right).$$

Dans ce cas, il est connu que

$$\mathbb{E}(X) = 5 \cdot \frac{1}{5} = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = 5 \cdot \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5}.$$

b. On tire 5 boules, dont X sont blanches. Nécessairement, $5 - X$ sont noires. On calcule le nombre de points : $Y = 2X - 3(5 - X) = 5X - 15$. On sait que $X(\Omega) = [\![0, 5]\!]$. On en déduit la loi de Y.

• L'univers image par Y est $Y(\Omega) = \{5k - 15 \mid k \in [\![0, 5]\!]\}$.

• Pour tout $k \in [\![0, 5]\!]$, $\mathbb{P}(\{Y = 5k - 15\}) = \mathbb{P}(\{X = k\}) = \binom{5}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(1 - \frac{1}{5}\right)^{5-k} = \binom{5}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{5-k}$.

• $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(5X - 15) = 5\mathbb{E}(X) - 15\mathbb{E}(1) = 5 - 15 = -10$ et $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(5X - 15) = 5^2\mathbb{V}(X) = 20$.

2. Soit E l'ensemble des 10 boules de l'urne. L'expérience est inchangée si on tire en une seule fois 5 boules dans l'urne. L'univers Ω est l'ensemble des 5-combinaisons des éléments de E, muni de sa probabilité uniforme. On sait que $|\Omega| = \binom{10}{5}$.

a. • L'univers image par X est $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$.

• Soit $k \in \{0; 1; 2\}$. L'événement $\{X = k\}$ est « obtenir k boules blanches et $5-k$ boules noires. Dénombrons-le.

— On choisit les k boules blanches parmi les 2 disponibles : $\binom{2}{k}$ possibilités.

— On choisit les $5 - k$ boules noires parmi les 8 disponibles : $\binom{8}{5-k}$ possibilités.

On trouve donc

$$\mathbb{P}(\{X = k\}) = \frac{|\{X = k\}|}{|\Omega|} = \frac{\binom{2}{k}\binom{8}{5-k}}{\binom{10}{5}}.$$

b. On sait que $Y = 5X - 15$.

• L'univers image par Y est $Y(\Omega) = \{5k - 15 \mid k \in \{0; 1; 2\}\}$.

• Pour tout $k \in \{0; 1; 2\}$, $\mathbb{P}(\{Y = 5k - 15\}) = \mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{2}{k}\binom{8}{5-k}}{\binom{10}{5}}$.

Probabilités 98

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0,1[$).
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n-X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   a. Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y=k|X=i)$.
   b. Prouver que $Z = X+Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
   Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante :
$$\binom{n-i}{\ell-i}\binom{n}{i} = \binom{\ell}{i}\binom{n}{\ell}.$$
   c. Déterminer l'espérance et la variance de Z.

retour à la première page

1. Un appel est considéré comme une expérience succès/échec (le succès est « obtenir le correspondant »). On effectue n expériences indépendantes de ce type. La probabilité d'un succès est p. La variable aléatoire X est le nombre de succès. Conclusion : $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.
2. a. Sachant que $X=i$, la secrétaire rappelle $n-i$ correspondants. La loi conditionnelle de Y sachant $\{X=i\}$ est donc la loi $\mathcal{B}(n-i,p)$:
$$\forall k \in \mathbb{N} \quad : \quad \mathbb{P}\left(\{Y=k\} \mid \{X=i\}\right) = \begin{cases} \dbinom{n-i}{k} p^k (1-p)^{n-i-k} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n-i \\ 0 & \text{si } k > n-i. \end{cases}$$
   b. L'univers image par Z est évidemment $[\![0,n]\!]$. D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $(\{X=i\})_{i\in[\![0,n]\!]}$, pour tout $\ell \in [\![0,n]\!]$:
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\{Z=\ell\}\right) &= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}\left(\{Z=\ell\} \mid \{X=i\}\right)\mathbb{P}(\{X=i\}) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}\left(\{X+Y=\ell\} \mid \{X=i\}\right)\mathbb{P}(\{X=i\}) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}\left(\{Y=\ell-i\} \mid \{X=i\}\right)\mathbb{P}(\{X=i\}).\end{aligned}$$
   On utilise les résultats précédents :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\{Z=\ell\}\right) &= \sum_{i=0}^{\ell} \binom{n-i}{\ell-i} p^{\ell-i}(1-p)^{n-i-(\ell-i)} \cdot \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{\ell} \binom{\ell}{i}\binom{n}{\ell} p^{\ell}(1-p)^{2n-i-\ell} \quad \text{(formule honteusement admise)} \\ &= \binom{n}{\ell} p^{\ell}(1-p)^{2n-2\ell} \sum_{i=0}^{\ell} \binom{\ell}{i}(1-p)^{\ell-i} \\ &= \binom{n}{\ell} p^{\ell}(1-p)^{2n-2\ell}(1+1-p)^{\ell} \\ &= \binom{n}{\ell} \left(p(2-p)\right)^{\ell} \left((1-p)^2\right)^{n-\ell} \\ &= \binom{n}{\ell} \left(2p-p^2\right)^{\ell} \left(1-(2p-p^2)\right)^{n-\ell}.\end{aligned}$$

Partant de $p \in]0,1[$, on observe que

$$2p-p^2 = p(2-p) > 0 \qquad \text{et} \qquad 1-(2p-p^2) = (1-p)^2 > 0, \text{ donc } 2p-p^2 < 1.$$

Cela justifie que $2p - p^2 \in]0,1[$ et permet de conclure que

$$Z \sim \mathcal{B}(n, 2p-p^2).$$

c. On sait que $\mathbb{E}(Z) = n\left(2p-p^2\right)$ et $\mathbb{V}(Z) = n(2p-p^2)(1-2p+p^2) = np(2-p)(1-p)^2$.

Restons sérieux et démontrons la formule admise : pour des entiers $0 \leqslant i \leqslant \ell \leqslant n$:

$$\binom{n-i}{\ell-i}\binom{n}{i} = \frac{(n-i)!}{(\ell-i)!(n-\ell)!} \cdot \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n!}{(\ell-i)!(n-\ell)!i!} = \frac{\ell!}{i!(\ell-i)!} \cdot \frac{n!}{\ell!(n-\ell)!} = \binom{\ell}{i}\binom{n}{\ell}.$$

Probabilités 99

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.

   Prouver que : $\forall\, a \in]0, +\infty[$, $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{V(Y_1)}{na^2}$.
3. **Application** : On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
   À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$?
   Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ème}}$ tirage.

retour à la première page

1. Soit $a \in]0, +\infty[$. Pour toute variable aléatoire X admettant un moment d'ordre 2, on a :
   $P\left(|X - E(X)| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{V(X)}{a^2}$.
2. On pose $X = \dfrac{S_n}{n}$.
   Par linéarité de l'espérance et comme toutes les variables Y_i ont la même espérance, on a $E(X) = E(Y_1)$.
   De plus, comme les variables sont mutuellement indépendantes, on a $V(X) = \dfrac{1}{n^2}V(S_n) = \dfrac{1}{n}V(Y_1)$.
   Alors, en appliquant 1. à X, on obtient le résultat souhaité.
3. $\forall i \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire Y_i valant 1 si la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est rouge et 0 sinon.
   Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p avec $p = \dfrac{2}{5} = 0,4$.
   Les variables Y_i suivent la même loi, sont mutuellement indépendantes et admettent des moments d'ordre 2.
   On a d'après le cours, $\forall i \in \mathbb{N}$, $E(Y_i) = 0,4$ et $V(Y_i) = 0,4(1-0,4) = 0,24$.

   On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. S_n représente le nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages.

   Alors $T_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$ représente la proportion de boules rouges obtenues au cours de n tirages.
   On cherche à partir de combien de tirages on a $P(0,35 \leqslant T_n \leqslant 0,45) > 0,95$.
   Or $P\left(0,35 \leqslant T_n \leqslant 0,45\right) = P\left(0,35 \leqslant \dfrac{S_n}{n} \leqslant 0,45\right) = P\left(-0,05 \leqslant \dfrac{S_n}{n} - E(Y_1) \leqslant 0,05\right)$
   $= P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \leqslant 0,05\right) = 1 - P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| > 0,05\right)$.
   On a donc $P\left(0,35 \leqslant T_n \leqslant 0,45\right) = 1 - P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| > 0,05\right)$.
   Or, d'après la question précédente, $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant 0,05\right) \leqslant \dfrac{0,24}{n(0,05)^2}$.

Donc $P\left(0,35 \leqslant T_n \leqslant 0,45\right) \geqslant 1 - \dfrac{0,24}{n(0,05)^2}$.

Il suffit alors pour répondre au problème de chercher à partir de quel rang n, on a $1 - \dfrac{0,24}{n(0,05)^2} \geqslant 0,95$.

La résolution de cette inéquation donne $n \geqslant \dfrac{0,24}{0,05^3}$ c'est-à-dire $n \geqslant 1920$.

Probabilités 104

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.
On lance simultanément les n boules. Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments. Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules. On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire (*sic !*) fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X.

2. ***a.*** Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(X = 2)$.

b. Finir de déterminer la loi de probabilité de X.

3. ***a.*** Calculer $\mathbb{E}(X)$.

b. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X)$ (*sic !*). Interpréter ce résultat.

retour à la première page

Soient $[\![1, n]\!]$ l'ensemble des boules et $\{1; 2; , 3\}$ l'ensemble des compartiments.
L'univers est $\Omega = \{1; 2; 3\}^{[\![1,n]\!]}$ muni de sa probabilité uniforme. Une fonction $f \in \Omega$ associe à la boule k le compartiment $f(k)$ dans lequel elle vient se ranger. On sait que $|\Omega| = 3^n$.

1. Il y a au moins une boule, donc au moins un compartiment sera occupé. L'univers image par X est $\boxed{X(\Omega) = \{0; 1; 2\}}$.

2. ***a.*** L'événement $\{X = 2\}$ est « toutes les boules se rangent dans le même compartiment », $\{X = 2\}$ est donc l'ensemble des 3 fonctions constantes de $[\![1, n]\!]$ dans $\{1; 2; 3\}$.

Ainsi $\mathbb{P}(\{X = 2\}) = \dfrac{3}{3^n}$.

$$\boxed{\mathbb{P}(\{X = 2\}) = \frac{1}{3^{n-1}}}$$

b. • Dénombrons $\{X = 1\}$. Un seul compartiment reste vide, les deux autres reçoivent au moins une boule. On décrit $\{X = 1\}$ comme union disjointe de trois événements.

— Le compartiment n° 1 reste vide, les deux autres reçoivent au moins une boule. Il s'agit de l'ensemble des fonctions surjectives de $[\![1, n]\!]$ vers $\{2; 3\}$.

— Le compartiment n° 2 reste vide, les deux autres reçoivent au moins une boule. Il s'agit de l'ensemble des fonctions surjectives de $[\![1, n]\!]$ vers $\{1; 3\}$.

— Le compartiment n° 3 reste vide, les deux autres reçoivent au moins une boule. Il s'agit de l'ensemble des fonctions surjectives de $[\![1, n]\!]$ vers $\{1; 2\}$.

Appelons a et b les deux compartiments qui reçoivent au moins une boule. Il y a 2^n fonctions de $[\![1, n]\!]$ dans $\{a; b\}$: la fonction constante égale à a, la fonction constante égale à b, les autres fonctions sont surjectives. Le nombre de fonctions surjectives de $[\![1, n]\!]$ sur $\{a; b\}$ est donc $2^n - 2$.

Conclusion : $|\{X = 1\}| = \underbrace{3}_{\substack{\text{trois}\\ \text{ensembles}}} \cdot \underbrace{(2^n - 2)}_{\substack{\text{fonctions}\\ \text{surjectives}\\ \text{à valeurs}\\ \text{dans}\{a;b\}}}$ si bien que $\mathbb{P}(\{X = 1\}) = \dfrac{3(2^n - 2)}{3^n}$.

$$\boxed{\mathbb{P}(\{X = 1\}) = \frac{2^n - 2}{3^{n-1}}}$$

• Pour finir, $\mathbb{P}(\{X = 0\}) + \mathbb{P}(\{X = 1\}) + \mathbb{P}(\{X = 2\}) = 1$ permet de trouver $\mathbb{P}(\{X = 0\})$.

$$\boxed{\mathbb{P}(\{X = 0\}) = \frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{3^{n-1}}}$$

3. ***a.*** On sait que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(\{X = 0\}) \cdot 0 + \mathbb{P}(\{X = 1\}) \cdot 1 + \mathbb{P}(\{X = 2\}) \cdot 2 = \dfrac{2^n}{3^{n-1}}$.

$$\mathbb{E}(X) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

b. On reconnaît une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X) = 0.$$

Quand n tend vers $+\infty$, en moyenne aucun compartiment ne reste vide.

Probabilités 105

1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.

2. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés.

Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\dfrac{1}{2}$.

a. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

b. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?

c. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

retour à la première page

1. Cours.

2. Soit A l'événement « on a tiré le dé pipé ». On sait que $\mathbb{P}(A) = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}$.

a. Soit B l'événement « on obtient un 6 ». On sait que $\mathbb{P}(B \mid A) = \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}\left(B \mid \overline{A}\right) = \dfrac{1}{6}$.

L'énoncé[1] demande $\mathbb{P}(A \mid B)$. La formule de Bayes appliquée avec le système complet d'événements $\left(A, \overline{A}\right)$ donne

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\left(B \mid \overline{A}\right)\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}.$$

b. Soit B_n l'événement « on obtient n fois le 6 en n lancers ». On cherche $p_n = \mathbb{P}(A \mid B_n)$. On sait que $\mathbb{P}(B_n \mid A) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ (probabilité d'obtenir n fois un 6 en n lancers avec un dé pipé) et $\mathbb{P}\left(B_n \mid \overline{A}\right) = \left(\dfrac{1}{6}\right)^n$ (probabilité d'obtenir n fois un 6 en n lancers avec un dé normal). La formule de Bayes donne

$$p_n = \mathbb{P}(A \mid B_n) = \frac{\mathbb{P}(B_n \mid A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B_n \mid A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\left(B_n \mid \overline{A}\right)\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)} = \frac{\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{6^n}\cdot\frac{3}{4}} = \frac{\frac{1}{2^{n+2}}}{\frac{1}{2^{n+2}}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{3^n}\cdot 3} = \frac{1}{1+\frac{1}{3^{n-1}}}.$$

c. On trouve $\lim p_n = 1$, ce qui signifie que si on obtient un très grand nombre de 6 consécutifs alors il est très probable que le dé soit pipé.

1. L'énoncé est mal formulé : ce n'est pas la probabilité que le dé soit pipé que l'on cherche, mais la probabilité conditionnelle que le dé soit pipé *sachant que l'on a obtenu un* 6.

Probabilités 107

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = \mathbb{P}(B_n)$.

a. Calculer p_1.

b. Prouver que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35} p_n + \dfrac{4}{7}$.

c. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

retour à la première page

a. On note A l'événement « la première urne choisie est l'urne 1 ».
On dispose du système complet d'événements $\left(A, \overline{A}\right)$. La formule des probabilités totales donne

$$\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B_1 \mid A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\left(B_1 \mid \overline{A}\right)\mathbb{P}\left(\overline{A}\right).$$

- Par équiprobabilité entre les deux urnes : $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = \dfrac{1}{2}$.
- On évalue $\mathbb{P}(B_1 \mid A)$. Si A est réalisé, on tire dans l'urne U_1, donc $\mathbb{P}(B_1 \mid A) = \dfrac{2}{5}$. De même $\mathbb{P}\left(B_1 \mid \overline{A}\right) = \dfrac{4}{7}$.
- On trouve

$$p_1 = \mathbb{P}(B_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{17}{35}.$$

b. On utilise le système complet d'événements $(B_n, \overline{B_n})$ pour appliquer la formule des probabilités totales :

$$p_{n+1} = \mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_{n+1} \mid B_n)\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}\left(B_{n+1} \mid \overline{B_n}\right)\mathbb{P}\left(\overline{B_n}\right).$$

Or : $\mathbb{P}(B_{n+1} \mid B_n) = \dfrac{2}{5}$ (si B_n est réalisé, le tirage suivant se fait dans U_1) ; $\mathbb{P}\left(B_{n+1} \mid \overline{B_n}\right) = \dfrac{4}{7}$ (si $\overline{B_n}$ est réalisé, le tirage suivant se fait dans U_2) ; $\mathbb{P}(B_n) = p_n$ et $\mathbb{P}\left(\overline{B_n}\right) = 1 - p_n$. On obtient

$$p_{n+1} = \frac{2}{5} p_n + \frac{4}{7}(1 - p_n) = -\frac{6}{35} p_n + \frac{4}{7}.$$

c. On reconnaît une suite arithmético-géométrique. Soit ω le point fixe : $\omega = -\dfrac{6}{35}\omega + \dfrac{4}{7}$. On trouve

$$\omega = \frac{20}{41}.$$

On vérifie sans peine que $p_{n+1} - \omega = -\dfrac{6}{35}(p_n - \omega)$. La suite $(p_n - \omega)_{n \geqslant 1}$ est donc géométrique. On obtient

$$p_n - \omega = \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1}(p_1 - \omega) = \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1} \cdot \frac{-3}{1\,435},$$

si bien que

$$p_n = \frac{20}{41} - \frac{3}{1\,435}\left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1}.$$

Probabilités 109

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.
On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

a. Déterminer la loi de X.

b. Déterminer la loi de Y.

retour à la première page

a. Après 3 tirages, on est certain d'avoir tiré une boule blanche. *(Si on tire d'abord les deux boules noires, le troisième tirage amène nécessairement une boule blanche puisqu'il n'y avait que deux boules noires dans l'urne.)*

• L'univers image par X est $\boxed{X(\Omega) = \{1; 2; 3\}}$.

• Calculons les probabilités élémentaires.

— L'événement $\{X = 1\}$ est « tirer une boule blanche au premier tirage ».

$$\boxed{\mathbb{P}(\{X = 1\}) = \frac{n}{n+2}}$$

— L'événement $\{X = 2\}$ est « tirer une boule noire puis une boule blanche ». Par la formule des probabilités composées, $\mathbb{P}(\{X = 2\}) = \underbrace{\frac{2}{n+2}}_{\substack{\text{boule noire}\\ \text{premier tirage}}} \times \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\substack{\text{boule blanche}\\ \text{second tirage}}}$.

$$\boxed{\mathbb{P}(\{X = 2\}) = \frac{2n}{(n+1)(n+2)}}$$

— L'événement $\{X = 3\}$ est « tirer une boule noire puis une boule noire ». Par la formule des probabilités composées, $\mathbb{P}(\{X = 3\}) = \underbrace{\frac{2}{n+2}}_{\substack{\text{boule noire}\\ \text{premier tirage}}} \times \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\substack{\text{boule noire}\\ \text{second tirage}}}$.

$$\boxed{\mathbb{P}(\{X = 3\}) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}}$$

On peut vérifier que $\mathbb{P}(\{X = 1\}) + \mathbb{P}(\{X = 2\}) + \mathbb{P}(\{X = 3\}) = 1$.

b. L'urne contient $n+2$ boules dont deux sont numérotées 1. Après $n+1$ tirages, on est certain d'avoir tiré une des deux boules numérotées 1. *(Si on tire d'abord les n boules numérotées entre 2 et n, le $(n+1)^e$ tirage amène nécessairement une boule n^o 1.)*

• L'univers image par Y est $\boxed{Y(\Omega) = [\![1, n+1]\!]}$.

• Calculons les probabilités élémentaires. Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$. L'événements $\{Y = k\}$ est « on tire d'abord $k-1$ boules de numéro $\neq 1$ puis on tire une boule numérotée 1 ». Au départ, il y a n boules de $n^{\text{o}} \neq 1$ et 2 boules de $n^{\text{o}} = 1$. La formule des probabilités composées donne

$$\begin{aligned}
\boxed{\mathbb{P}(\{Y = k\})} &= \underbrace{\frac{n}{n+2}}_{n^{\text{o}} \neq 1} \cdot \underbrace{\frac{n-1}{n+1}}_{n^{\text{o}} \neq 1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{n-(k-2)}{(n+2)-(k-2)}}_{n^{\text{o}} \neq 1} \cdot \underbrace{\frac{2}{(n+2)-(k-1)}}_{n^{\text{o}} = 1} \\
&= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)}{(n+2)(n+1)\ldots(n-k+3)} \cdot 2 \\
&= \frac{n!}{(n-k+1)!} \cdot \frac{(n-k+2)!}{(n+2)!} \cdot 2 \\
&= \boxed{2\frac{n-k+2}{(n+1)(n+2)}}.
\end{aligned}$$

Vérifions : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(\{Y = k\}) = 2\sum_{k=1}^{n+1} \frac{n-k+2}{(n+1)(n+2)} = 2\sum_{i=1}^{n+1} \frac{i}{(n+1)(n+2)} = 2\frac{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)} = 1.$

Probabilités 112

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et E un ensemble possédant n éléments. On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

a. Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \subset B$.

b. Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.

c. Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

retour à la première page

a. Notons $\Gamma = \left\{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 \;\middle|\; A \subset B\right\}$. On classifie les éléments de Γ selon le cardinal k de B. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, notons $\Gamma_k = \left\{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 \;\middle|\; A \subset B \text{ et } |B| = k\right\}$. Il est clair que

$$\Gamma = \bigcup_{k=0}^{n} \Gamma_k \quad \text{union disjointe,}$$

si bien que

$$|\Gamma| = \sum_{k=0}^{n} |\Gamma_k|\,.$$

Dénombrons Γ_k. Pour définir un élément (A, B) de Γ_k :

— on choisit une partie B de E telle que $|B| = k$: $|\mathcal{P}_k(E)| = \binom{n}{k}$ possibilités ;

— on choisit une partie A de B : $|\mathcal{P}(B)| = 2^k$ possibilités.

Tout compte fait, $|\Gamma_k| = \binom{n}{k} 2^k$. On conclut :

$$a = |\Gamma| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = (2+1)^n = 3^n.$$

b. Notons $\Delta = \left\{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 \;\middle|\; A \cap B = \emptyset\right\}$. On observe que $A \cap B = \emptyset \iff A \subset \overline{B}$. Les applications

$$\phi : \begin{array}{ccc} \Delta & \longrightarrow & \Gamma \\ (A, B) & \longmapsto & (A, \overline{B}) \end{array} \quad \text{et} \quad \psi : \begin{array}{ccc} \Gamma & \longrightarrow & \Delta \\ (X, Y) & \longmapsto & (X, \overline{Y}) \end{array}$$

sont donc bien définies et sont des bijections réciproques l'une de l'autre (on vérifie facilement que $\phi \circ \psi = \mathrm{Id}_\Gamma$ et $\psi \circ \phi = \mathrm{Id}_\Delta$). On en déduit que

$$b = |\Delta| = |\Gamma| = 3^n.$$

c. Notons $H = \left\{(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3 \;\middle|\; A \cup B \cup C = E \text{ et } A, B, C \text{ deux à deux disjoints}\right\}$.
On observe que $(A, B, C) \in H \iff \left(C = \overline{A \cup B} \text{ et } A \cap B = \emptyset\right)$. Les applications

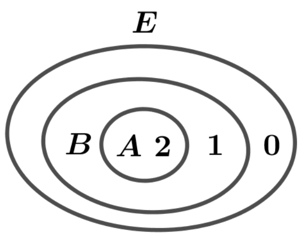
$$\phi : \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \Delta \\ (A, B, C) & \longmapsto & (A, B) \end{array} \quad \text{et} \quad \psi : \begin{array}{ccc} \Delta & \longrightarrow & \Gamma \\ (A, B) & \longmapsto & (A, B, \overline{A \cup B}) \end{array}$$

sont donc bien définies et sont des bijections réciproques l'une de l'autre (on vérifie facilement que $\phi \circ \psi = \mathrm{Id}_\Delta$ et $\psi \circ \phi = \mathrm{Id}_H$). On en déduit que

$$c = |H| = |\Delta| = 3^n.$$

d. *Remarque. On pouvait utiliser une bijection pour la question* ***a****. Si $A \subset B \subset E$, on définit la fonction $f_{A,B}$ par*

$$f_{A,B} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{0; 1; 2\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 2 & \textit{si } x \in A \\ 1 & \textit{si } x \in B \setminus A \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases} \end{array}$$



Les applications

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \Gamma & \longrightarrow & \{0;1;2\}^E \\ & (A,B) & \longmapsto & f_{A,B} \end{array} \quad \textit{et} \quad \begin{array}{rccc} \psi: & \{0;1;2\}^E & \longrightarrow & \Gamma \\ & f & \longmapsto & \big(f^{-1}(\{2\}), f^{-1}(\{1;2\})\big) \end{array}$$

sont bien définies et sont des bijections réciproques l'une de l'autre. Donc

$$|\Gamma| = \left|\{0;1;2\}^E\right| = 3^n.$$