Logique et ensembles

Dans les feuilles de TD, le nombre d'étoiles * désigne le niveau de difficulté estimé de l'exercice.
L'utilisation du signe $\star$ indique que l'exercice est à la limite du programme.

1 Pour commencer...

Exercice 1 (*)
Soit f une application définie sur $\mathbf{R}$.
Dire pour chaque situation si les deux assertions ont la même signification ou non. Expliquer.

1. « $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x)=0$ » et « $\forall z \in \mathbf{R},\ f(z)=0$ ».
2. « $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x)=0$ » et « $\exists x \in \mathbf{R},\ f(x)=0$ ».
3. « Les éléments sont non tous nuls » et « les éléments sont tous non nuls ».

Exercice 2 (*)
Donner la valeur de vérité des assertions

1. « $\frac{1}{x} \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$ »
2. « $x \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \geq 0$ »
3. « $x \mapsto \cos x$ est croissante sur $\mathbf{R}$
$\iff$ $\mathbf{Z}$ est un sous-ensemble de $\mathbf{N}$ »
4. « (u_n) n'est pas croissante $\Rightarrow (u_n)$ est décroissante. »
5. « $\big(\forall x \in \mathbf{R},\ \exists \lambda \in \mathbf{R},$ tel que $f(x)=\lambda x\big)$
$\iff$ f est une fonction linéaire. »

Exercice 3 (*)
Compléter avec $\Rightarrow$, $\iff$ ou $\Leftarrow$.

$ABCD$ est un carré	$ABCD$ est un parallélogramme
a>1	$\frac{1}{a}<1$
$AB=AC$	ABC est isocèle
$\forall x \in \mathbf{R},\ \exists y \in \mathbf{R},\ y<x$	$\exists y \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathbf{R},\ y<x$
$\ln a = b$	$a = \mathrm{e}^b$
$x>2$	$x^2>4$
A, B alignés et B, C alignés	A, B, C alignés.
$x>0$	$-x \leq 0$
f est continue	f est dérivable

Exercice 4 (*)

1. Quelle est la contraposée de :
« si un nombre est divisible par 6, alors il est pair » ?
2. Quelle est la réciproque du théorème :
« Si un nombre entier est multiple de 10 alors son chiffre des unités est 0 ».
3. Quelle est la contraposée du théorème :
« Si un nombre entier est multiple de 10 alors son chiffre des unités est 0 ».

2 Lecture des quantificateurs

Exercice 5 (**)
Ces propositions sont-elles vraies ?

1. $\forall \varepsilon>0,\ \exists a \in \mathbf{R}_+^*,\ a<\varepsilon$
2. $\mathrm{e}^a>0 \Rightarrow a>0$
3. $a>0 \Rightarrow \mathrm{e}^a>0$
4. $\mathrm{e}^a<0 \Rightarrow a<0$
5. Si f est une fonction $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$,
alors $\forall y \in \mathbf{R},\ \exists x \in \mathbf{R},\ f(x)=y$
6. Si f est une fonction $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$,
alors $\exists y \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathbf{R},\ f(x)=y$
7. Si f est une fonction $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$,
alors $\exists x \in \mathbf{R},\ \exists y \in \mathbf{R},\ f(x)=y$
8. Si f est une fonction $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$,
alors $\exists x \in \mathbf{R},\ \forall y \in \mathbf{R},\ f(x)=y$

Exercice 6 (**)
Existe-t-il une fonction f sur $\mathbf{R}$, vérifiant

$$\exists x \in \mathbf{R},\ \forall y \in \mathbf{R},\ f(y)>f(x)$$

Exercice 7 (**)
Donner la signification des propositions :

1. $\forall x \in \mathbf{R},\ \exists M \in \mathbf{R},\ f(x) \leq M$.
2. $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} \geq u_n$
3. $\forall A \in \mathbf{R},\ \exists n \in \mathbf{N},\ u_n>A$
4. (***) $\forall \varepsilon>0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N},\ \forall n \geq n_\varepsilon,\ |u_n| \leq \varepsilon$

Exercice 8 (**)
Dans cet exercice, les lettres x et y désignent des nombres réels.
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Étudier les réciproques

1. Si $x \leqslant 1$ et $y \leqslant 1$ alors $x\,y \leqslant 1$.
2. Si $x \leqslant 1$ et $y \leqslant 1$ alors $\dfrac{x}{y} \leqslant 1$.
3. Si $x\,y \geq 1$ alors $x \geq 1$ et $y \geq 1$.

3 Écriture avec les quantificateurs

Exercice 9 (*)
Écrire les propositions suivantes avec des quantificateurs :

1. La fonction f est majorée sur $\mathbf{R}$.
2. La fonction f n'est pas majorée sur $\mathbf{R}$.
3. La fonction f ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$.
4. La fonction f s'annule sur $\mathbf{R}$.
5. La fonction f est nulle sur $\mathbf{R}$.
6. La fonction f s'annule une unique fois sur $\mathbf{R}$.

Exercice 10 (**)
Écrire les propositions suivantes avec des quantificateurs :

1. Aucun entier n'est supérieur à tous les autres,
2. Entre deux nombres rationnels distincts, il existe toujours un nombre irrationnel.
3. Étant donnés trois réels, il en existe au moins deux de même signe.
4. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
5. La fonction f est supérieure ou égale à la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbf{R}$.

4 Négation

Exercice 11 (**)
Donner la négation (avec les quantificateurs) des propositions de l'exercice 7.

Exercice 12 (**)
Donner la négation des assertions :

1. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, \ f(x) > y$
2. $x > y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
3. $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, \ x > y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
4. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, \ x > y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
5. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, \ x > y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

5 Conditions nécessaires et suffisantes

Exercice 13 (*)
Compléter par « *il faut* » ou « *il suffit* », puis interpréter en terme de condition nécessaire ou suffisante.

1. ... ... manger pour vivre.
2. pour qu'une suite converge, ... qu'elle soit bornée.
3. ... ... que x soit supérieur à -1 pour qu'il soit positif.
4. ... ... que x soit supérieur à 2 pour que x^2 soit non nul.
5. ... ... travailler pour réussir.
6. ... ... qu'un des côtés soit strictement plus long que les deux autres pour que le triangle soit rectangle.

Exercice 14 (**)
Dire pour chaque proposition si elle est vraie ou fausse, puis écrire la bonne proposition en utilisant une flèche d'implication ou d'équivalence.

1. Pour qu'une suite converge, il est nécessaire qu'elle soit bornée.
2. Il suffit qu'un nombre appartienne à $\mathbf{N}$, pour qu'il soit positif.
3. Pour que Socrate soit mortel, il suffit qu'il soit un homme.
4. Pour qu'une suite décroissante converge vers 0, il faut et il suffit qu'elle soit positive.
5. Pour que $x^3 > 1$, il faut que $x > -1$.

6 Ensembles

Exercice 15 (*)
Montrer que $\{x > 0,\ \forall y > 0, x < y\} = \emptyset$.

Exercice 16 (*)
Lister les ensembles

1. $\left\{(x, y) \in [\![1, 3]\!]^2\right\}$
2. $\{(x, y) \in [\![1, 3]\!] \times \{-1\,,\,1\}\}$
3. $\{(x, y) \in [\![1, 3]\!] \times [\![-1, 1]\!]\}$
4. $\left\{x^2,\ x \in \{-1, 0, 1\}\right\}$
5. $[\![1, 3]\!]^2$
6. $\{-1, 1\}^3$

Exercice 17 (**)
Déterminer les solutions réelles et les représenter graphiquement (sur la droite ou dans le plan).

1. $x = \sqrt{x^2}$
2. $\sqrt{x} < 0$
3. $(x + 1)^2 < x$
4. $y \geq x \Rightarrow y^2 \geq x^2$
5. $\mathrm{e}^{x+1} = \mathrm{e}^x + 1$
6. $x^2 < 2^2$
7. $-x^2 < -2$

Exercice 18 (**)

1. Donner un exemple d'une intersection d'ensembles non vides, qui est vide.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'union de deux ensembles soit vide.

Exercice 19 (**)
Décrire en extension les ensembles $\mathcal{P}(\{x\})$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{x\}))$.

Exercice 20 (***)

1. Soient deux ensembles A et B, écrire $A - B = A \setminus B = \{x \in A, x \notin B\}$ à partir des opérations ensemblistes usuelles.
2. Donner une représentation graphique de $A - B$.
3. Prouver que $A - B = A \iff B - A = B$

Exercice 21 (**)
Pour tout $m \in \mathbf{R}$, on définit la droite $\mathcal{D}_m$ par l'équation

$$\mathcal{D}_m\ :\ 12mx - 9y = 3m + 6$$

Montrer que toutes les droites $\mathcal{D}_m$ sont concourantes en un unique point.

Exercice 22 (**)
On définit les ensembles

$$K = [2, 5] \times [-1, 4] \quad \text{et} \quad D = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ y \leq x\right\}$$

1. Représenter dans le plan
   (a) le domaine correspondant aux points $M(x, y)$ pour $(x, y) \in K$.
   (b) le domaine correspondant aux points $M(x, y)$ pour $(x, y) \in D$.
2. L'implication suivante est-elle vraie ?
$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad (x, y) \in K \Rightarrow (x + 1, y - 1) \in D$$
3. La réciproque est-elle vraie ?
4. Montrer que $K \cap D \neq \emptyset$

7 Récurrence

Exercice 23 (*)
Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

Exercice 24 (*)
Soit (u_n) la suite réelle définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

Montrer que
$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = 2^n + 1$$

Exercice 25 (**)
Soit $n \in \mathbf{N}$, démontrer que $10^n - (-1)^n$ est divisible par 11.

Exercice 26 (**) (Compliquer pour simplifier)
Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2$$

On pourra commencer par montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

8 Construire un raisonnement

Exercice 27 (Exemples de cours)

1. (*contraposée*) Montrer que, si $a+b$ est irrationnel alors ou a ou b est irrationnel.
2. *(absurde)* Montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.
3. (*disjonction*)
   Pour $n \in \mathbf{Z}$, donner la parité de $n(n+1)$.
4. (*disjonction*)
   Montrer que $\forall x \in \mathbf{R},\ |x-1| \leq x^2-x+1$.
5. (*analyse-synthèse*)
   Prouver que toute fonction f définie sur $\mathbf{R}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 28 (*)
Montrer que $(\forall n \in \mathbf{N},\ a2^n+b3^n=0) \iff a=b=0$

Exercice 29 (**)
En utilisant un raisonnement par contraposée, montrer que

1. Pour $n \in \mathbf{N}$, si n^2 est impair, alors n est impair,
2. Pour $a \in \mathbf{R}$, si a^2 n'est pas un multiple entier de 16, alors $\frac{a}{2}$ n'est pas un entier pair,
3. Pour $a \in \mathbf{R}$, si $\forall \varepsilon > 0$, $a \leq \varepsilon$ alors $a \leq 0$.

Exercice 30 (**)
a et b désignent deux nombres réels.

1. Montrer que si $a+b>1$, alors $a>\frac{1}{2}$ ou $b>\frac{1}{2}$.
2. Est-il vrai que si $ab>1$, alors $a>1$ ou $b>1$?

Exercice 31 (**)
Trouver toutes les fonctions f qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \exists \lambda \in \mathbf{R},\ \text{ tel que } f(x)=\lambda x$$

Exercice 32 (***)
Montrer qu'il existe une unique fonction $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ f\left(y-f(x)\right)=2-x-y$$

Donner son expression.

9 Approfondissement - synthèse

Exercice 33 (*)
2017 personnes sont assises autour d'une table ronde. Chacun est soit un sage (qui dit toujours la vérité), soit un menteur (qui ment toujours). Chaque personne dit la phrase : « J'ai pour voisins un sage et un menteur ».
Combien de sages sont à table ?
Même question avec 2018 personnes.

Exercice 34 (*)
Montrer que :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ |x-2| < x^2-2x+3$$

Exercice 35 (*)
Démontrer l'inégalité de Bernoulli

$$\forall x \geq -1,\ x \neq 0,\ \forall n \geq 2,\ (1+x)^n > 1+nx$$

Exercice 36 (**)
Démontrer que si vous rangez $(n+1)$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant au moins 2 paires de chaussettes.

Exercice 37 (**)
Pour tout $m \in \mathbf{R}$, on définit la droite $\mathcal{D}_m$ par l'équation

$$\mathcal{D}_m\ :\ 12mx-9y=3m+6$$

Montrer que toutes les droites $\mathcal{D}_m$ sont concourantes en un unique point.

Exercice 38 (**)
On définit les ensembles

$$K=[2,5]\times[-1,4] \quad \text{et} \quad D=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2,\ y\leq x\right\}$$

1. Représenter dans le plan
   (a) le domaine correspondant aux points $M(x,y)$ pour $(x,y)\in K$.
   (b) le domaine correspondant aux points $M(x,y)$ pour $(x,y)\in D$.
2. L'implication suivante est-elle vraie ?

$$\forall (x,y)\in\mathbf{R}^2,\quad (x,y)\in K \Rightarrow (x+1,y-1)\in D$$

3. La réciproque est-elle vraie ?
4. Montrer que $K\cap D\neq\emptyset$

Exercice 39 (***)
Existe-t-il une fonction $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que

$$\forall (x,y)\in\mathbf{N}^2,\ \left(f(x)^{f(y)}\right)=y^x$$

Exercice 40 (***)
On définit le logarithme décimal de x : $\log(x)$ comme l'unique y tel que $10^y=x$. Montrer que $\log 2 \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$.