Matrices

1 Produit matriciel

Exercice 1 (*)
Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculer (s'ils ont un sens) les produits

$$AB, BA, AC, CA, BC, CB, B^2$$

Exercice 2 (**)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Trouver toutes les matrices colonne u telles que $Au = 3u$.

Exercice 3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer AB et comparer avec BA. Qu'est-ce que ce calcul illustre ?

Exercice 4 (**)
Montrer que si la matrice A possède une ligne nulle, alors AB possède une ligne nulle.

Exercice 5 (**)
Trouver deux matrices $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ toutes deux non nulles, mais telles que $AB = 0$.

2 Matrices qui commutent

Exercice 6 (**)
Pour A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on note

$$\mathrm{Com}(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R}),\ MA = AM\}$$

$\mathrm{Com}(A)$ désigne l'ensemble des matrices qui commutent avec A, c'est le *commutant de* A.

1. Montrer que $\mathrm{Com}(A) \neq \emptyset$.
2. Montrer que si $M, N \in \mathrm{Com}(A)$, alors
$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2, \quad \lambda M + \mu N \in \mathrm{Com}(A).$$
3. Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, déterminer $\mathrm{Com}(A)$.

Exercice 7 (*)
Soit $(a, b) \in (\mathbf{R}^*)^2$, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.
Trouver toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ qui commutent avec A, c'est-à-dire telles que $AB = BA$.

Exercice 8 (**) (méthode)
Résoudre l'équation $X^2 = A$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.
Indication[1]

Exercice 9 (**)
Résoudre l'équation

$$X^2 - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

Exercice 10 (* *)**
Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Exercice 11 (***)
Trouver toutes les matrices A qui commutent avec les matrices symétriques.
S'inspirer de l'exercice 10.

3 Transposition

Exercice 12 (*)
Donner la transposée de

1. $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 13 (**)
Soient A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ deux matrices symétriques.

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que le produit AB soit encore symétrique.
2. Les puissances successives de A sont-elles symétriques ?
3. Si A est inversible, A^{-1} est-elle symétrique ?

4 Matrices inversibles

Exercice 14 (*)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Exprimer A^2 en fonction de A et de I_3.
2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

1. On pourra remarquer que A et X commutent.

Exercice 15 (*)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Exprimer $A^3 - A$.
2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 16 (*)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Exprimer A^2 en fonction de A et de I_2.
2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 17 (*)
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$.

1. Trouver une relation linéaire entre A^2, A et I_2.
2. En déduire une condition suffisante pour que A soit inversible; donner alors l'expression de A^{-1}.

Exercice 18 (**)

1. Montrer que s'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $A^p = 0$, alors A n'est pas inversible.
2. Montrer que s'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $(A+I)^p = 0$, alors A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 19 (**)
Soient M, N deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
Montrer que M et N sont inversibles si et seulement si MN est inversible.

5 Pivot de Gauss

Exercice 20 (*)
Écrire la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ comme produit de matrices de transvections, dilatations, permutations.

Exercice 21 (*)
À l'aide d'opérations sur les lignes, donner la forme échelonnée réduite des matrices suivantes, en déduire leur rang.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 22 (*)
Calculer l'inverse (s'il existe) des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 23 (**)
Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ quatre nombres complexes. On considère le système linéaire

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{ccccccccl} x & + & 3y & + & 4z & + & 7t & = & \lambda_1 \\ x & + & y & + & z & + & t & = & \lambda_2 \\ x & + & 3y & + & 3z & + & 2t & = & \lambda_3 \\ x & + & 3y & + & 4z & + & 5t & = & \lambda_4 \end{array} \right.$$

Résoudre le système et en déduire l'inverse de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 24 (**)
Justifier que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & (-1) \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$$

est inversible et déterminer A^{-1}.
Indication : [2]

Exercice 25 (***)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, montrer que

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \iff (\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}),\ AB = 0 \Rightarrow B = 0)\,.$$

6 Puissances

Exercice 26 (**)
Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.
2. La matrice A est-elle inversible ? si oui, donner son inverse.
3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
4. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

Exercice 27 (**)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer A^n pour $n \in \mathbf{N}$.
On pourra utiliser le binôme de Newton avec deux matrices bien choisies.

Exercice 28 (**)
Calculer A^k pour $k \in \mathbf{N}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & (2) \\ & \ddots & \\ (2) & & 1 \end{pmatrix}$$

2. Résoudre le système.

Exercice 29 (**)
Soit $n \geq 2$ un nombre entier,
On pose $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ tels que $a \neq b$ et $a \neq (1-n)b$.
On définit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ par

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & b & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

1. Pour $p \in \mathbf{N}$, calculer A^p.
2. (a) Calculer

   $$A^2 - \big(2a + (n-2)b\big)A + (a-b)\big(a + (n-1)b\big)I_n.$$

   (b) En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 30 (***)
Soit $n \geq 2$, montrer que la matrice de taille n

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible et calculer son inverse.
Indication : trouver un polynôme annulateur

Exercice 31 (***)
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

1. Soit $q \in \mathbf{R}$, simplifier l'expression $(1-q)\sum_{k=0}^{p} q^k$.
2. On suppose que A est une matrice nilpotente : c'est-à-dire qu'il existe $r \in \mathbf{N}$ tel que $A^r = 0$.

   Montrer que $(I_n - A)$ est inversible et exprimer son inverse en fonction des puissances de A.

Exercice 32 (**)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer $D = P^{-1}AP$ et vérifier que la matrice est diagonale.
3. Exprimer A en fonction de D, P et P^{-1},
   En déduire A^n en fonction de P, P^{-1} et des puissances de D.
4. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 33 (* *)**
Soit A une matrice triangulaire supérieure stricte de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que $A^n = 0$.
On pourra commencer par des exemples en petite dimension