Applications

1 Pour commencer

Exercice 1 (*)
Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité des applications suivantes :

1. $f_1 : \begin{cases} \mathbf{Z} & \to \mathbf{Z} \\ n & \mapsto -n \end{cases}$
2. $f_2 : \begin{cases} \mathbf{R} & \to [0,1] \\ x & \mapsto |\sin x| \end{cases}$
3. $f_3 : \begin{cases} \mathbf{N} & \to \mathbf{N} \\ n & \mapsto 2n \end{cases}$
4. $f_4 : \begin{cases} \mathbf{N} & \to \{-1,1\} \\ n & \mapsto (-1)^n \end{cases}$
5. $f_5 : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \to \mathbf{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto (x, x+y, x-y) \end{cases}$
6. $f_6 : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \to \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto (2x+3y, x+2y) \end{cases}$
7. $f_7 : \begin{cases} \mathbf{R}^{\mathbf{R}} & \to \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \\ \varphi & \mapsto \varphi' \end{cases}$
8. $f_8 : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \to \mathbf{C} \\ (x,y) & \mapsto x+iy \end{cases}$
9. $f_9 : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \to \mathbf{C} \\ (x,y) & \mapsto x\,\mathrm{e}^{iy} \end{cases}$

Lorsque les applications sont bijectives, déterminer leur réciproque.

Exercice 2 (**) (Fonction indicatrice)
Soient A, B deux parties de E. Montrer successivement que

1. $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$
2. $\mathbf{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbf{1}_A$
3. $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B$

2 Exercices abstraits

Exercice 3 (*)
Soient E et F deux ensembles non vides et f une injection de E dans F.
Montrer que f induit une injection de E dans $f(E)$.

Exercice 4 (**)
Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Si $g \circ f$ est injective,
   (a) Montrer que f est injective,
   (b) Montrer à l'aide d'un contre-exemple que g n'est pas nécessairement injective.
2. Si $g \circ f$ est surjective,
   (a) Montrer que g est surjective,
   (b) Montrer à l'aide d'un contre-exemple que f n'est pas nécessairement surjective.

Exercice 5 (***)
Soient E et F deux ensembles non vides. Montrer l'équivalence entre les deux assertions :

1. Il existe une injection de E dans F.
2. Il existe une surjection de F sur E.

Exercice 6 (***)
Soit E et F deux ensembles, et $\varphi \in F^E$. On suppose $E \neq \emptyset$.
On définit l'application f par

$$f \;:\; \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(F) \\ A & \mapsto & \varphi(A) \end{cases}$$

1. Cette application est-elle injective en général ?
2. À quelle condition nécessaire et suffisante sur f est-elle injective ?

3 Applications numériques

Exercice 7 (*)
On considère les applications

$$f \,:\, x \mapsto x^2+1 \quad \text{et} \quad g \,:\, x \mapsto \ln x$$

Déterminer les domaines de définition et les expressions de $f\circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 8 (*)
On considère les applications

$$f \,:\, x \mapsto \frac{2x+1}{x-2} \quad \text{et} \quad g \,:\, x \mapsto x^2$$

1. Donner les ensembles de définition de f et g.
2. Déterminer $f\circ g$ et $g\circ f$.
3. Calculer l'image de $3\,x$ par f et l'image de x^3 par g.

Exercice 9 (*)
Déterminer (graphiquement)
$\sin\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[\right)$, et $\cos\left(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[\right)$.

Exercice 10 (*)
Représenter graphiquement les fonctions suivantes sur leur domaine de définition.

$$a \,:\, x \mapsto \begin{cases} 2-x & \text{si } x \geq 3 \\ x^2 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

$$b \,:\, x \mapsto \begin{cases} 1+1/x & \text{si } x > 0 \\ \sqrt{(-x)} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Répondre aux questions suivantes en lisant sur les graphes des fonctions concernées:

1. Donner $a\,(]-\infty,0])$, $a\,([0,+\infty[)$.
2. Donner $b\,(]0,2])$, $b\,([1,+\infty[)$.
3. $a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est-elle surjective ? injective ?

   Déterminer deux intervalles I et J de $\mathbf{R}$ tels que $a : I \to J$ soit bijective.
4. $b : \mathbf{R} \to [0,+\infty[$ est-elle surjective ? injective ?

   Déterminer deux intervalles $I \subset \mathbf{R}$ et $J \subset [0,+\infty[$ tels que $b : I \to J$ soit bijective.

Exercice 11 (**)

$$f \,:\, x \mapsto \sqrt{x^2+x-2}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Déterminer l'image de f, c'est-à-dire $f(\mathcal{D}_f)$.
3. L'application f est-elle injective de $\mathcal{D}_f$ dans $\mathbf{R}$?

Exercice 12 (**)
Soit $f \,:\, x \mapsto \sqrt{|x-1|}$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Déterminer l'image de f, c'est-à-dire $f(\mathcal{D}_f)$.
3. L'application f est-elle injective de $\mathcal{D}_f$ dans $\mathbf{R}$?

Exercice 13 (**)
Soit la fonction

$$f \,:\, x \mapsto \frac{x^2+1}{2x-1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Déterminer $\mathrm{Im}\,(f) = f(\mathcal{D}_f)$.
3. L'application f est-elle injective de $\mathcal{D}_f$ dans $\mathbf{R}$?

   Est-elle surjective entre ces mêmes ensembles ?

4 Applications numériques bijectives

Exercice 14 (*) (Bijection continue)
Soit I une partie de $\mathbf{R}$, $a \leq b$ sont deux points de I.
Soit $f : I \to \mathbf{R}$, on suppose que $f(a) \leq f(b)$.
Montrer à l'aide de contre-exemples que les hypothèses du théorème de la bijection continue sont *minimales* (on ne peut pas en supprimer).

Exercice 15 (*)
Soient

$$f \,:\, \begin{cases} \mathbf{R} & \to \mathbf{R} \\ x & \mapsto \sqrt{x^2+1}-x \end{cases} \quad \text{et} \quad g \,:\, \begin{cases} \mathbf{R}^* & \to \mathbf{R} \\ x & \mapsto \frac{1-x^2}{2x} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout réel x, $f(x) > 0$.
2. Montrer que la composée $f \circ g$ est bien définie sur $\mathbf{R}^*$ et calculer $f \circ g(x)$ pour tout x non nul.
   Même question pour $g \circ f$.
3. Que peut-on en conclure ? *(on pourra utiliser la première question)*

Exercice 16 (*)
On considère l'application

$$h \,: x \;\mapsto \frac{2x+1}{x+2}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_h$ de h.
2. Déterminer $\mathrm{Im}\,(h) = h(\mathcal{D}_h)$ et montrer que h est bijective de $\mathcal{D}_h$ dans $\mathrm{Im}\,(h)$.

   Donner son application réciproque.

Exercice 17 (**)
Pour $(a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4$ avec $c \neq 0$, on définit

$$f \,:\, x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$$

1. Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. À quelle(s) condition(s) nécessaires et suffisantes sur (a,b,c,d), l'application est-elle bijective de son domaine de définition sur son image.

   Dans ce cas, exprimer son image et l'application réciproque.