

FONCTIONS USUELLES

Toutes les études de fonction se font **sans calculatrice**.

1 ÉTUDES QUALITATIVES DE FONCTIONS

Exercice 1 (*) (Courbes)

Tracer les fonctions suivantes (sans calculatrice et avec le minimum de calculs) les fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \ln(x-1) + 2$
2. $x \mapsto e^{|x|}$
3. $x \mapsto \frac{3x-2}{x-1}$
4. $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$

Exercice 2 (*) (Symétries)

Les fonctions suivantes sont-elles paires ? impaires ? périodiques ? de quelle période ? symétriques par rapport à un point ? à un axe ?

1. $x \mapsto \ln(|x|)$
2. $x \mapsto \frac{1+e^x}{1-e^x}$
3. $x \mapsto \sin(x^2)$
4. $x \mapsto \sin\left(\frac{x+1}{2}\right)$
5. $x \mapsto -xe^{x^2-3}$
6. $x \mapsto e^{(x-3)^2+1}$
7. $x \mapsto -\ln|(x+1)(x+2)|$
8. $x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+4}$

Exercice 3 (**)

Soient f, g deux fonctions définies sur \mathbf{R} , croissantes.

1. Montrer que $f + g$ est croissante.
2. Si f et g sont positives, que peut-on dire de la monotonie de $f \times g$?
3. Si f et g sont négatives, que peut-on dire de la monotonie de $f \times g$?
4. Dans le cas général, que peut-on dire de la monotonie de $f \times g$?

Exercice 4 (**)

Pour chaque fonction,

- indiquer le domaine de définition,
- étudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité dans \mathbf{R} .

1. $x \mapsto xe^{x^2}$
2. $x \mapsto x \sin x$
3. $x \mapsto e^{\sin x}$
4. $x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
5. $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
6. $x \mapsto x \lfloor x \rfloor$

2 ÉQUATIONS

Exercice 5 (**)

1. À partir des dérivées de \cos et de \sin , déterminer les domaines de dérivabilité de \arcsin et \arccos et calculer leur dérivées.
2. À l'aide d'un calcul de dérivée, montrer que

$$\forall x \in [-1, 1], \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

3. Chercher une expression semblable pour

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} \quad \text{pour } x \neq 0$$

Exercice 6 (***)

1. Discuter, suivant la valeur de $a \in \mathbf{R}$ du nombre de solutions de l'équation

$$(E_a) \quad x^a = \ln x$$

2. Tracer dans un même repère la courbe représentative de $x \mapsto \ln x$ et celle de la fonction $x \mapsto x^{a_0}$ où a_0 est l'unique réel strictement positif tel que l'ensemble des solutions de E_{a_0} soit un singleton.

3 DÉRIVÉES DE FONCTIONS COMPOSÉES

Exercice 7 (*)

Déterminer les domaines de définition et calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$
2. $x \mapsto e^{(x^2)}$
3. $x \mapsto e^{2x+1}$
4. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$
5. $x \mapsto \ln|x|$
6. $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$

Exercice 8 (**)

Déterminer les domaines de définition et calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \ln|x^2 - 3x + 2|$
2. $x \mapsto \sqrt{\tan x}$
3. $x \mapsto \ln^2(x+1)$
4. $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$

Exercice 9 (**)

Déterminer les domaines de définition et calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \sin^3(x)$
2. $x \mapsto \sqrt{\ln(x^2 - x + 1)}$
3. $x \mapsto \sqrt{\ln|x^2 - x - 1|}$
4. $x \mapsto \arctan(x^2)$
5. $x \mapsto \ln(\arctan(x^2 - 2x + 1))$

4 ÉTUDES COMPLÈTES

Exercice 10 (*) (baccalauréat 1962)

Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction

$$f : x \mapsto 2(1 - \cos x) \sin^2(x)$$

Exercice 11 ()**

Étude complète de la fonction

$$x \mapsto \frac{\ln x}{x}$$

Exercice 12 ()**

Études complètes des fonctions de l'exercice 8.

Exercice 13 ()**

Étude complète de la fonction

$$x \mapsto \ln |x^3 + 3x^2 + 3x + 2|$$

Exercice 14 () (baccalauréat 1962)**

Étude complète de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + 2x - 5}{x^2 - 2x + 2}$$

En déduire le nombre d'extrémités d'arcs¹ u solutions de

$$(E) : (1 - m) \sin^2 u - 2(m + 1) \cos u + 3m + 4 = 0$$

On posera $\cos u = x$ et l'on discutera suivant les valeurs du paramètre m .

Exercice 15 ()**

On définit les fonctions

$$f : x \mapsto (2x - 1)^2 \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \sup_{x \leq t \leq x+1} f(t)$$

Étudier g .

1. Le nombre de $u \in [0, \pi]$ qui sont solution de l'équation.