Polynômes à une indéterminée

1 Manipulations algébriques

Exercice 1 (*) Calculer les produits de P et Q.

1) $P = 1 + X + 3X^2 - X^5$ et $Q = X$

2) $P = 1 + X + 3X^2 - X^5$ et $Q = X + X^2 - X^4$

3) $P = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5$ et $Q = X - 1$

Exercice 2 (**)

1) À l'aide du polynôme $P = (1+X)^n$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![1, n]\!],\ k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

Indication[1]

2) À l'aide du polynôme $P = (1+X)^{2n}$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

3) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{m+n}{p}$

Exercice 3 (**)

On définit une suite de polynômes (P_n) par $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et $\forall n \geq 0$, $\quad P_{n+2} + P_n = 2XP_{n+1}$

1) Calculer P_2 et P_3.

2) Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.

3) Déterminer la parité de P_n.
Calculer $\widetilde{P_n}(1)$, puis $\widetilde{P_n}(-1)$.

2 Racines et factorisation

Exercice 4 (*) Factoriser sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ en produit d'irréductibles.

1) $X^3 - X^2 - 2X$

2) $X^8 - 3X^7 + 4X^6 - 5X^5 + 4X^4 - X^3 + X - 1$

3) $X^7 - X^2$

4) $2X^4 - 10X^3 + 24X^2 - 28X + 16$
Indication : on sait que $(1+i)$ est racine.

5) $P = X^4 - 5X^3 + 7X^2 - 5X + 6$

6) $P = X^4 - 2X^3 + 4X^2 + 2X - 5$

7) $P = X^4 + X^3 - X^2 + X - 2$

8) $P = X^4 - X^2 + 1$

[1] Penser à la dérivée.

Exercice 5 (***) (calculatoire) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, factoriser sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ en produit d'irréductibles.

1) $X^{2n} + 1$ **2)** $X^{2n+1} + 1$

Exercice 6 (**) On considère le polynôme

$$P = (X+1)^{2n+1} - X^{2n+1} - 1$$

1) Montrer que $X^2 + X$ factorise P.

2) Est-ce que (-1) est racine double de P ?

Exercice 7 (***)

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $p, q \in \mathbb{R}^2$, pour que $X^3 + pX + q$ admette une racine multiple dans $\mathbb{R}$

Exercice 8 (**) Soit le polynôme scindé

$$P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{C}[X]$$

avec $a \neq 0$ et de racines x, y, z.

1) Exprimer $x + y + z$, $xy + xz + yz$ et xyz en fonction de a, b, c, d.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ les systèmes suivants :

$$(1) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ xyz = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad (2) \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{11}{6} \end{cases}$$

Exercice 9 (***)

Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $P(X^n)$ est divisible par $X - 1$ alors il l'est aussi par $X^n - 1$

3 Fonctions polynomiales

Exercice 10 (*) Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elle est polynomiale et le justifier.

1) $f : x \mapsto \cos x$

2) $f : x \mapsto e^x$

3) $f : x \mapsto \frac{(x+1)^{2016} - (1-x)^{2016}}{x}$

4) $f : x \mapsto \frac{1}{x}$

4 Équations de polynômes

Exercice 11 (*) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, tel que $P(X+1) = P(X)$.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) = P(0)$

2) En déduire que P est constant.

Exercice 12 (**) Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = P'P''$ *Indication*[2]

Exercice 13 (**)
Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$P(X^2) = (X^2+1)P(X)$$

Exercice 14 (**)

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \in \mathbb{R}$$

Exercice 15 (**)

Résoudre sur $\mathbb{R}[X]$, $(P')^2 = 4P$

Exercice 16 (***) On veut trouver tous les polynômes

$P \in \mathbb{R}[X]$, tels que P' factorise P

1) Analyse

(a) En supposant P solution, trouver une relation entre P'' et P

(b) En déduire que les polynômes solution sont nécessairement de la forme $\lambda(X-\omega)^n$, avec λ, ω deux réels.

2) Rédiger la synthèse.

5 Matrices

Exercice 17 (***)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Vérifier que $(A-6I)(A^2-3I) = 0$
On dit que $P = (X-6)(X^2-3)$ est un polynôme annulateur de A.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$,
On admet qu'il existe deux polynômes $Q_n, \in \mathbb{R}[X]$ et $R_n \in \mathbb{R}_1[X]$ tels que

$$X^n = PQ_n + R_n$$

Exprimer R_n.

3) En déduire les coefficients de la matrice A^n en fonction de n.

6 Grands classiques

Exercice 18 (***) (Polynômes interpolateurs de Lagrange)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$ deux à deux distincts.

1) Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire de degré exactement n qui s'annule en $a_1, a_2, \cdots, a_n$. Donner l'expression de ce polynôme.

2) En déduire que pour tout $k \in [\![1; n+1]\!]$, il existe un unique polynôme L_k de degré exactement n tel que $\forall i \in [\![1; n+1]\!]$, $\widetilde{L_k}(a_i) = \delta_{ik}$. Donner l'expression de L_k. δ_{ik} désigne le symbole de Kronecker qui vaut 1 si $i = k$ et 0 sinon. *Indication*[3]

3) Soient $(b_1, b_2, \cdots, b_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$.
À partir d'une combinaison linéaire des L_k, montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que pour tout $i \in [\![1; n+1]\!]$, on ait $\widetilde{P}(a_i) = b_i$

4) Donner une expression très simple du polynôme

$$P = \sum_{k=1}^{n+1} L_k$$

Exercice 19 (***)

Soit $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et $n \in \mathbb{N}$.

On définit la fonction cotangente par $\text{cotan}\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ lorsque cela est défini.

1) Montrer qu'il existe un polynôme P_n tel que

$$\sin((2n+1)\theta) = (\sin\theta)^{2n+1} P_n(\text{cotan}^2\theta)$$

2) Expliciter P_n.

3) **(a)** Montrer que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\text{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n+1}$ est racine de P_n.

(b) Montrer que les $\left(\text{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n+1}\right)_{k \in [\![1,n]\!]}$ sont deux à deux distinctes.

(c) En déduire que ce sont les seules racines de P_n et que le polynôme est scindé sur $\mathbb{R}$.

4) En déduire que

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \text{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

Indication[4]

5) **(a)** Vérifier que pour tout $a \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$,

$$0 < \sin a < a < \tan a$$

(b) Calculer $1 + \text{cotan}^2 a$ en fonction de $\sin a$.

(c) En déduire que pour tout $a \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\text{cotan}^2 a < \frac{1}{a^2} < 1 + \text{cotan}^2 a$$

6) Montrer la limite :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

[2] Penser aux degrés.
[3] Existence : choisir un polynôme comme à la question précédente, et prendre le bon coefficient dominant.
[4] Utiliser les relations coefficients racines.