Limites et continuité

1 Limites et équivalents

Exercice 1 (*)
Pour chacune des fonctions suivantes dire si elle admet une limite au point a, une limite à droite, à gauche.
Si elle est définie en a, étudier sa continuité en a, à droite de a, à gauche de a.
Si elle n'est pas définie en a, étudier si elle admet un prolongement par continuité en a.

1) $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ en $a=1$.

2) $x \mapsto \dfrac{|x|}{x}$ en $a=0$.

3) $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ en $a=1$.

4) $x \mapsto x\left|1+\dfrac{1}{x}\right|$ en $a=0$.

5) $x \mapsto x\sin\dfrac{1}{x}$ en $a=0$.

6) $x \mapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ en $a=0$.

7) $x \mapsto \dfrac{2x^2-5x+1}{x^2-1}$ en $a=1$.

8) $x \mapsto \sqrt{x}\ln x$ en $a=0$.

9) $x \mapsto |x|\ln|x|$ en $a=0$.

10) $x \mapsto x^{\pi}$ en $a=0$.

11) $x \mapsto \dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-1}$ en $a=1$.

12) $x \mapsto \dfrac{x^3-2x^2+1}{x^2-7x}$ en $a=0$.

Exercice 2 (*) (méthode)
Donner un équivalent en 1 de la fonction suivante

$$x \mapsto \frac{\ln x}{x^2-1}.$$

Exercice 3 (**)
Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elle admet un prolongement par continuité en a, et le donner s'il existe.

1) $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ en $a=0$.

2) $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ en $a=0$.

3) $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}-1}}{x}$ en $a=0$.

4) $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}-1}{x}$ en $a=0$.

5) $x \mapsto \dfrac{x\ln(1+x)}{\tan^2 x}\cos x$ en $a=0$.

6) $x \mapsto \dfrac{x\,\mathrm{e}^{x}-1}{\sin x}$ en $a=0$.

7) $x \mapsto \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x}$ en $a=0$.

Exercice 4 (*)
Pour chacune des expressions suivantes, donner un équivalent simple en a.

1) $x^5-3x^4+x^2-2$ en $a=+\infty$.

2) $x^5-3x^4+x^2-2$ en $a=0$.

3) $\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}$ en $a=+\infty$.

4) $\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}$ en $a=0$.

5) $\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}$ en $a=1$.

6) $x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}-x$ en $a=+\infty$.

Exercice 5 (**)
Pour chacune des expressions suivantes, donner un équivalent simple en a.

1) $\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^{\sin x}$ en $a=0$.

2) $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$ en $a=0$.

3) $\ln(\cos x)$ en $a=0$.

4) $\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)^x-1$ en $a=+\infty$.

5) $\left(\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^x$ en $a=+\infty$.

6) $\frac{\ln^2 x}{(x-1)\sin x}\sqrt{x}-1$ en $a=1$.

7) $\frac{\mathrm{e}^x-1}{\sin^3 x}\left(\sqrt{\cos x}-1\right)$ en $a=0$.

8) $x\ln(1+x^2)-2x\ln x$ en $a=+\infty$.

9) $(\tan x)\tan(2x)$ en $a=\frac{\pi}{2}$.

10) $\sqrt{1+\sin x}-\frac{1-\sin x}{x}$ en $a=0$.

Exercice 6 (***)
Déterminer les limites suivantes si elles existent :

1. $\lim\limits_{x\to 0} x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$.
2. $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln(x)\ln(\ln x)$.

2 Continuité

Exercice 7 (*)
Montrer qu'une fonction polynomiale réelle de degré impair admet au moins une racine réelle.

Exercice 8 (**)
Montrer qu'une application continue périodique sur $\mathbf{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Exercice 9 (**)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1];[0,1])$.
Montrer que f admet un point fixe dans $[0,1]$, c'est-à-dire $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0)=x_0$.

Exercice 10 (**)
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par

$$f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f. On le notera D.
2. Déterminer la parité de f.
3. Montrer que f est bijective de $\mathbf{R}$ dans un intervalle à déterminer.
4. Représenter graphiquement f et f^{-1} dans un repère orthonormé (indiquer ses éventuelles asymptotes et ses tangentes remarquables).

Exercice 11 (**)
Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, continue, telle que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, f(x) < x.$$

1. Montrer que $f(0) = 0$.
2. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}_+^*$, avec $a \leq b$, il existe $M \in [0, 1[$, tel que $\forall x \in [a, b],\ f(x) \leq Mx$.

3 Approfondissement

Exercice 12 (**)
Étudier la continuité sur $\mathbf{R}$ de l'application

$$f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$$

Exercice 13 (***)
La fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^x}{\lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor}}$$

admet-elle une limite en $+\infty$?

Exercice 14 (***)
Étudier la continuité de la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$.

$$f : x \mapsto \sup_{n \in \mathbf{N}} \frac{x^n}{n!}$$

Exercice 15 (***)
Soit $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ une application croissante telle que $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ soit décroissante.
Montrer que f est continue.