

# DÉRIVABILITÉ

## 1 CALCUL

### Exercice 1 (\*\*)

Sur quelle(s) partie(s) de  $\mathbf{R}$ , les applications suivantes sont-elles continues ? dérivables ?

Calculer leur dérivée.

Dans le cas d'une prolongement possible par continuité, étudier la dérivabilité de la fonction prolongée, éventuellement son caractère  $\mathcal{C}^1$ .

1.  $f : x \mapsto 2^{x^2+1}$
2.  $f : x \mapsto x|x|$
3.  $f : x \mapsto \frac{x}{|x|+1}$
4.  $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x^3}$
5.  $f : x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$
6.  $f : x \mapsto \ln(\sqrt{x-1} + 1)$
7.  $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{|x|}} \sin \frac{1}{x}$
8.  $f : x \mapsto (x+1)^{\cos x}$
9.  $f : x \mapsto (\sqrt{x} + 1)^{\ln x}$
10. (\*\*\*)  $f : x \mapsto \left(\frac{x}{x-1}\right)^{-x}$

### Exercice 2 (\*\*)

En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout  $x > 0$

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) < \frac{1}{x}.$$

### Exercice 3 (\*\*)

En utilisant le théorème des accroissements finis, déterminer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( (x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} \right)$$

### Exercice 4 (\*\*)

Soit  $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ .

1. Montrer que  $f$  peut être prolongeable en une application continue sur  $\mathbf{R}$ .  
On travaillera désormais avec l'application prolongée.
2. Faire l'étude des branches infinies de  $f$ .
3. Montrer que  $\forall n \in \mathbf{N}, \exists P_n \in \mathbf{R}[x]$  tel que

$$\forall x \in \mathbf{R}^*, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

4. En déduire que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbf{R}$ .

## 2 RAISONNEMENTS THÉORIQUES SIMPLES

### Exercice 5 (\*)

Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  dérivable, telle que  $f'$  ne s'annule pas. Montrer que  $f$  ne peut pas être périodique.

### Exercice 6 (\*)

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $I$ .

1. Montrer que si  $f$  est paire, alors  $f'$  est impaire.  
Montrer que si  $f$  est impaire, alors  $f'$  est paire.
2. A-t-on les réciproques ?

### Exercice 7 (\*\*)

Soit  $P$  une fonction polynomiale de degré supérieur ou égal à 2.

On suppose que  $P$  admet autant de racines distinctes que son degré (on dit que  $P$  est scindée à racines simples). Montrer qu'il en est de même pour sa dérivée  $P'$  : qu'elle est scindée à racines simples.

### Exercice 8 (\*\*)

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction dérivable, et

$$g : \begin{cases} [0; 1] & \rightarrow & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(2x) & \text{si } x \in [0; \frac{1}{2}] \\ f(2x-1) & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

À quelle(s) condition(s)  $g$  est-elle dérivable ?

## 3 APPROFONDISSEMENT

### Exercice 9 (\*\*\*) (méthode)

Soit  $(u_n)$  une suite définie pour tout  $n \in \mathbf{N}$  par

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \cos(u_n) = f(u_n)$$

1. Montrer qu'il existe un réel  $\ell \in [0, 1]$  tel que
 
$$\ell = \frac{1}{2} \cos(\ell)$$
2. Montrer que  $\ell$  est l'unique point fixe de  $f$ .
3. Montrer que  $\forall x \in \mathbf{R}, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ .
4. En déduire que  $\forall n \in \mathbf{N}, |u_n - \ell| \leq \frac{|u_0 - \ell|}{2^n}$
5. Montrer que  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ .

### Exercice 10 (\*\*) (Prolongement de la dérivée)

Montrer que si  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$  et que  $f'(x)$  admet une limite finie quand  $x \rightarrow a$ , alors  $f$  est dérivable en  $a$  et  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)$ .

### Exercice 11 (\*\*\*)

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbf{R}$  et  $\alpha > 1$ . Déterminer toutes les applications vérifiant

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq |x - y|^\alpha$$

**Exercice 12 (\*\*\*) (Fonctions lipschitziennes)**

Pour  $\alpha > 0$ , une fonction est dite  $\alpha$ -lipschitzienne sur  $I$ , si

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|$$

1. (a) Montrer qu'une fonction  $\alpha$ -lipschitzienne est continue.
- (b) Si  $f$  est  $\alpha$ -lipschitzienne, et dérivable sur  $I$ . Que peut-on dire de  $f'$  ?
- (c) Montrer qu'une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un segment est lipschitzienne. Est-ce vrai pour une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle quelconque ?
2. Soit  $f$   $\alpha$ -lipschitzienne sur  $\mathbf{R}$  avec  $\alpha < 1$ .
  - (a) Montrer que  $f$  admet un unique point fixe.
  - (b) Soit  $(u_n)$  définie par  $u_0 \in \mathbf{R}$  et

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

Montrer que  $(u_n)$  converge.

**Exercice 13 (\*\*\*)**

Soit  $a > 0$  et  $f$  une fonction réelle continue sur  $[0, a]$  et dérivable sur  $]0, a[$ .

On suppose que  $f(0) = 0$  et  $f(a)f'(a) < 0$

Montrer qu'il existe  $c \in ]0, a[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

**Exercice 14 (\*\*\*)**

Soit  $n \in \mathbf{N}$ ,  $I$  un intervalle de  $\mathbf{R}$  et  $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{R})$ .

On suppose que  $f$  s'annule en  $n + 1$  points distincts de  $I$ .

1. Montrer que la dérivée  $n$ -ième de  $f$  s'annule au moins une fois sur  $I$ .
2. Soit  $\alpha \in \mathbf{R}$ . Montrer que la dérivée  $(n - 1)^{\text{ème}}$  de  $f' + \alpha f$  s'annule au moins une fois sur  $I$ .

**Exercice 15 (\*\*\*) (Rolle à l'infini)**

Soit  $a \in \mathbf{R}$ ,

Soit  $f \in \mathcal{C}^0([a; +\infty[, \mathbf{R})$ ,  $f$  dérivable sur  $]a; +\infty[$ .

On suppose que  $f$  admet une limite finie en  $+\infty$  qui est égale à  $f(a)$ .

Montrer qu'il existe  $c \in ]a; +\infty[$ , tel que  $f'(c) = 0$