

PRIMITIVES

1 RECHERCHE DE PRIMITIVES SIMPLES

EXERCICE 1 (*) Préciser si F est une primitive de f .

- 1) $F(x) = x + 1$ et $f(x) = 1$
- 2) $F(x) = x^2 - 5x + 3$ et $f(x) = x - 5$
- 3) $F(x) = x^x$ et $f(x) = (\ln x + 1)x^x$
- 4) $F(x) = 2x - 1$ et $f(x) = x^2 - x$
- 5) $F(x) = \frac{1}{x}$ et $f(x) = \ln|x|$

EXERCICE 2 (*) Trouver les primitives pour chacune des fonctions suivantes :

- 1) $t \mapsto e^{3t}$
- 2) $t \mapsto \sin\left(\frac{t}{5}\right)$
- 3) $t \mapsto t^5 + 2t^3 - t - 1$
- 4) $t \mapsto (t-1)(t+1)$
- 5) $t \mapsto \cos^2 t + \sin^2 t$
- 6) $t \mapsto \cos^2 t - \sin^2 t$
- 7) $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$
- 8) $t \mapsto \ln(t+1)$
- 9) $t \mapsto t(t^2+1)^n$
- 10) $t \mapsto \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$
- 11) $t \mapsto \sin t \cos^5 t$

EXERCICE 3 (*) Trouver une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

- 1) $t \mapsto \tan t$
- 2) $t \mapsto \frac{t+2}{t^2+4t}$
- 3) $t \mapsto \frac{t+2}{\sqrt{t^2+4t}}$
- 4) $t \mapsto te^{5t^2}$
- 5) $t \mapsto \sin(t)\cos(t)$
- 6) $t \mapsto \frac{x}{x^2-5}$
- 7) $t \mapsto \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$
- 8) $t \mapsto \tan^2(t)$
- 9) $t \mapsto \frac{\sin t}{\cos^3 t}$

EXERCICE 4 ()** Calculer

- 1) $\int \frac{\ln^4 t}{t} dt$
- 2) $\int \frac{dt}{t \ln t}$
- 3) $\int \frac{dt}{\cos^2(t)\sqrt{\tan(t)}}$
- 4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \sin(x)}{\cos^2(x)} dx$

EXERCICE 5 (*)** Calculer

- 1) $\int \frac{\ln t - 1}{t^2} dt$ 3) $\int e^t \left(\frac{1}{t} + \ln t\right) dt$
- 2) $\int \frac{1}{t + \sqrt{t}} dt$ 4) $\int \frac{t \cos t - \sin t}{t^2} dt$

2 INTÉGRATIONS PAR PARTIES

EXERCICE 6 (*)

À l'aide d'intégrations par parties, calculer

- 1) $\int_0^1 t e^t dt$
- 2) $\int_1^e t^2 \ln t dt$
- 3) $\int_0^1 \arctan t dt$
- 4) $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin t dt$
- 5) $\int t \cos t dt$
- 6) $\int_{-1}^1 (t^2 + 5t + 6) \cos 2t dt$

EXERCICE 7 ()**

- 1) Calculer la dérivée de $t \mapsto \frac{1}{\tan t}$
- 2) En déduire, grâce à une intégration par parties une primitive

$$\int \frac{t}{\sin^2 t} dt$$

EXERCICE 8 (*)**

À l'aide d'intégrations par parties, calculer

- 1) $\int_0^1 e^t \cos t dt$
- 2) $\int_0^1 t \arctan t dt$

3 CHANGEMENTS DE VARIABLE

EXERCICE 9 (*) En s'aidant à chaque fois d'un changement de variable, calculer les intégrales suivantes.

- 1) $\int_e^x \frac{\ln(\ln t)}{t} dt$
- 2) $\int_0^x e^t \cos(e^t) dt$

EXERCICE 10 ()** En s'aidant à chaque fois d'un changement de variable, calculer les intégrales suivantes.

- 1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 t dt$ avec $u(t) = \tan t$
- 2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \sin t} dt$ avec $u(t) = \sin t$

EXERCICE 11 (*)** Calculer

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \tan\left(\frac{u}{2}\right) \ln(1 + \cos u) du$$

On pourra poser $t = \tan\left(\frac{u}{2}\right)$

EXERCICE 12 (*)**

Soient $S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} dt$ et $C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt$

- 1) Montrer que $C = S$ grâce à un changement de variables.
- 2) Que vaut $C + S$. En déduire les valeurs de C et de S .
- 3) En déduire $\int_0^1 \frac{dt}{t + \sqrt{1-t^2}}$
(on pourra utiliser un changement de variable)

4 FONCTIONS CIRCULAIRES**EXERCICE 13 (**)** Calculer

1) $\int_0^x \cos^3(t) \sin^2(t) dt$ 2) $\int_0^x \cos^3(t) \sin(t) dt$

3) $\int_0^x \cos^3(t) \sin^4(2t) dt$

5 SYNTHÈSE**EXERCICE 14 (**)**

En s'aidant d'une formule de récurrence, calculer

$$u_n = \int x^n e^{-x} dx \quad \text{où } n \in \mathbb{N}$$

EXERCICE 15 (*) (Intégrales de Wallis)**Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$

- 1) À l'aide de l'intégration par parties, trouver une relation entre I_n et I_{n+2} .
- 2) Exprimer I_n en fonction de n en distinguant les cas n pair et n impair.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt$

À l'aide d'un changement de variable, montrer que $I_n = J_n$ pour tout n .**6 COMPLÉMENT HORS PROGRAMME****EXERCICE 16 (★) (Fractions rationnelles)**

Trouver une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

1) $t \mapsto \frac{1}{2t^2 + 5t + 2}$

3) $t \mapsto \frac{1}{t^2 + 4t + 4}$

2) $t \mapsto \frac{1}{4t^2 - 4t + 1}$

4) $t \mapsto \frac{t}{t^4 + 2t^2 + 3}$