Couples et vecteurs de variables aléatoires

1 Couples de variables aléatoires

Exercice 1 (*)

On lance deux dés de façon indépendante, X est le résultat du premier, Y est le maximum des deux.

Voici deux façons de déterminer la loi de Y :

1) Déterminer $\mathbb{P}(Y \leq k)$ pour $k \in [\![1;6]\!]$.En déduire la loi de Y.

2) Déterminer la loi de (X, Y). En déduire la loi de Y.

Exercice 2 (**)

Dans une urne qui contient n jetons numérotés de 1 à n, on tire successivement (sans remise) deux jetons. On note X_1 le premier numéro, et X_2 le second numéro.

1) Décrire l'univers image du couple (X_1, X_2).

2) Donner la loi du couple (X_1, X_2).

3) On note $X = \min(X_1, X_2)$ et $Y = \max(X_1, X_2)$.

- **(a)** Déterminer les lois marginales de X et de Y.
- **(b)** Donner l'univers du couple (X, Y).
- **(c)** Déterminer la loi conjointe de (X, Y). Vérifier que l'on retrouve bien les lois marginales à partir de la loi conjointe.

4) On pose $Z = Y - X$.

- **(a)** Déterminer l'univers image de Z.
- **(b)** Déterminer la loi de Z.

2 Variables aléatoires indépendantes

Exercice 3 (*)

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi de Bernoulli de paramètre p.

1) Donner l'espérance de leur somme.

2) Donner l'espérance de leur minimum.

Exercice 4 (**) (Classique : min et max)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère une suite $(X_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

On pose $X = \min\limits_{i \in [\![1,n]\!]}(X_i)$, et $Y = \max\limits_{i \in [\![1,n]\!]}(X_i)$.

1) Si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, avec $p \in]0,1]$.

- **(a)** Donner les lois de X et de Y.
- **(b)** Donner les espérances $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.

2) Si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(p_i)$, avec $p_i \in]0,1]$.

- **(a)** Donner les lois de X et de Y.
- **(b)** Donner les espérances $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.

3) Si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathscr{U}\left([\![1,p]\!]\right)$, suit la loi uniforme sur $[\![1,p]\!]$, avec $p \geq 1$.

- **(a)** Donner les lois de X et de Y.
- **(b)** Donner les espérances $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 5 (**)

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli de même paramètre p et indépendantes.

1) Soit $Y_n = X_n X_{n+1}$, déterminer la loi de Y_n, son espérance et sa variance.

2) Calculer $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$

Exercice 6 (**) Soient $0 < p < 1$ et $q = 1 - p$,

$(X_n)_n$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p.

Pour $k \in [\![1;n]\!]$, on note $Y_k = X_k + X_{k+1}$

Soit $\epsilon > 0$ fixé, montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k - 2p\right| > \epsilon\right) = 0$$

Exercice 7 (*)

Un avion transporte 230 passagers et leurs bagages. Il pèse 190 tonnes sans passagers ni bagages mais avec l'équipage et plein de carburant.

Les consignes de sécurité interdisent le décollage si le poids de l'appareil dépasse 220 tonnes. Les 230 places ont été réservées et on sait que le poids d'un passager suit une loi d'espérance 68kg et d'écart type 10kg.

On admet que le poids des bagages suit une loi d'espérance égale à 18kg et d'écart type 7kg.

Toutes les variables considérées sont supposées mutuellement indépendantes.

1) Soit X la variable aléatoire égale au poids de l'appareil au moment du décollage, calculer $\mathbb{E}(X)$ et σ_X

2) Déterminer un majorant de la probabilité que l'appareil n'ait pas l'autorisation de décoller.

Exercice 8 (*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(X_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$, une suite de variables aléatoires finies discrètes (quelconques).

Montrer que

$$\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$$

Indication[1]

EXERCICE 9 (***)

Un centre d'appels effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts dont chacun décroche avec la probabilité p.
Les appels sont mutuellement indépendants.

1) On note N_1 le nombre de correspondants qui ont décroché. Quelle est la loi de N_1 ?

2) L'employé rappelle un peu plus tard les $n - N_1$ correspondants qui n'ont pas décroché au premier appel. On note N_2 le nombre de correspondants qui ont décroché et $N = N_1 + N_2$. Quelle est la loi de N ?

On suppose que la probabilité de décrocher au deuxième appel est également p.

Indication : On doit trouver une loi binomiale dont il faut exprimer le paramètre en fonction de p.

[1] On pourra utiliser une récurrence.