Applications linéaires

1 Applications

Exercice 1 (Vrai-Faux)

Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

1) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (5x+2y, x-y) \end{array}\right.$

2) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (xy, y) \end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+1, y, x+y) \end{array}\right.$

4) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y, z) \end{array}\right.$

5) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x,x,x,x) \end{array}\right.$

6) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f'+5f \end{array}\right.$

Exercice 2 (*)

Soit $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x+y, x-y)$.

Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et donner sa réciproque.

Exercice 3

On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1) Montrer que la donnée $\left\{\begin{array}{ll} \varphi(e_1) & = e_1+e_2 \\ \varphi(e_2) & = e_1-e_2 \\ \varphi(e_3) & = e_1+\lambda e_3 \end{array}\right.$ définit un unique endomorphisme $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$.

2) Soit $x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Calculer $\varphi(x)$.

3) Quelle valeur donner à λ pour que φ soit injective ? soit surjective ?

2 Images et noyaux

Exercice 4 (*)

Donner l'image et le noyau de

1) $(x,y) \mapsto (x+3y, x-3y)$

2) $(x,y) \mapsto (x, y, x+y)$

3) $(x,y,z) \mapsto (x+y+2z, 2x-3y+z)$

4) $(x,y,z) \mapsto (x-y+z, x+5y-z, 2x+2y+3z)$

5) $(x,y,z) \mapsto (x-y-z+t, x+2y+z-t, 3x-z+t, 2x-y+t)$

Exercice 5 (*)

Déterminer le noyau et l'image de u en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$

$$u:(x,y,z) \mapsto (ax+y+z, ax+ay+z, x+ay+az)$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, pour que l'application soit injective/surjective/bijective.

Exercice 6 (***)

Soient E, F, G trois espaces vectoriels,

$f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$.

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1) Interpréter la proposition "$g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E,G)}$" avec $\operatorname{Im} f$ et $\ker g$.

2) Montrer que $f\big(\ker(g \circ f)\big) = \ker g \cap \operatorname{Im} f$.

Exercice 7 (***)

Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$, montrer que si f et g commutent, alors $\ker g$ et $\operatorname{Im} g$ sont stables par f.

Rappel de vocabulaire :

On dit que f et g commutent si $\forall x \in E, f \circ g(x) = g \circ f(x)$
Un sous espace vectoriel F de E est dit stable par f, si $f(F) \subset F$.

3 Endomorphismes et matrices

Exercice 8 (*)

Soit $M = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

On note u_M l'application linéaire associée dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$. Déterminer $\ker u_M$ et $\operatorname{Im} u_M$.

Exercice 9 (*) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit l'application

$$u:\left\{\begin{array}{ll} \mathbb{R}_n[X] & \to \mathbb{R}_{n+1}[X] \\ P & \mapsto XP(X) \end{array}\right.$$

1) Justifier que $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}_{n+1}[X])$

2) Déterminer sans calculs le noyau et l'image de u.

3) Déterminer la matrice de u entre les bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.

Exercice 10 (*)

Pour $n \in \mathbb{N}*$, on définit l'application

$$u:\left\{\begin{array}{ll} \mathbb{R}_n[X] & \to \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto P(X) - XP'(X) \end{array}\right.$$

1) Justifier que $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$

2) Déterminer le noyau et l'image de u.

3) Déterminer la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 11 (*)

On note $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2y,x) \end{array} \right.$

1) Déterminer la matrice $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f) = \mathrm{mat}(f,\mathscr{C},\mathscr{C})$ de f dans la base $\mathscr{C}$.

2) Montrer que les vecteurs $b_1 = (1,1)$ et $b_2 = (-1,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ que l'on notera $\mathscr{B}$.

3) Déterminer les matrices $\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$, $\mathrm{mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f)$ et $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

Exercice 12 (*)

Soit (e_1,e_2,e_3) une base de $\mathbb{R}^3$.

Chercher les applications $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ telles que la matrice de f dans (e_1,e_2,e_3) soit la même que dans (e_2,e_3,e_1).

Exercice 13 (**) (Projecteur)

Soit E un espace de dimension n, soit $r \leq n$.

$\mathscr{B} = (e_1,e_2,\cdots,e_r,e_{r+1},\cdots,e_n)$ est une base (quelconque) de E.

Soit p l'application linéaire telle que $\forall i \leq r$, $p(e_i) = e_i$ et $\forall i \geq r+1$, $p(e_i) = 0$.

On dit que p un projecteur de E sur $\mathrm{Vect}(e_1,\cdots,e_r)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(e_{r+1},e_{r+2},\cdots,e_n)$.

1) Donner la matrice de p dans la base $\mathscr{B}$: $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(p)$.

2) Donner le rang de p.

3) Donner une base du noyau de p et une base de son image.

4) Montrer que $A^2 = A$.
On note $\mathscr{B}'$ une autre base de E, et $A' = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(p)$.
A-t-on $A'^2 = A'$?
La réciproque est aussi vraie, mais on ne le montre pas ici.

5) (***)Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
Montrer que A est la matrice d'un projecteur et trouver une base dans laquelle la matrice de A est diagonale.

4 Rang

Exercice 14 (*)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, V un sous-espace vectoriel de E et $f \in \mathscr{L}(E)$.

Montrer que $V \subset f(V) \Rightarrow f(V) = V$.

Dans ce cas, que peut-on en déduire sur la restriction de f à V ?

Exercice 15 (**)

Soit E de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg} f = 1$. Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f^2 = \lambda f$

Exercice 16 (***)

Pour $n \in \mathbb{N}*$, on définit l'application

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \to \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$$

1) Justifier que $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$

2) Déterminer le noyau de u.

3) Montrer que $\mathrm{Im}\,(u) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

4) Déterminer $\mathrm{Im}\,(u)$

5 Synthèse

Exercice 17 (**)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que f est la somme de r endomorphismes de rang 1.

Exercice 18 (***)

E est l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré au plus 2.

(e_1,e_2,e_3) est la base canonique de E.

φ est l'application de E dans $\mathbb{R}^3$ définie par $\varphi(P) = (P(0),P'(1),P''(2))$

1) Démontrer que φ est linéaire, qu'elle est injective, puis que c'est un isomorphisme.

2) Donner la matrice A de φ dans les bases canoniques de E et de $\mathbb{R}^3$.

3) Pour $i \in \{1,2,3\}$, on pose $H_i = \varphi^{-1}(e_i)$. Montrer que (H_1,H_2,H_3) est une base de E.

4) À l'aide de la matrice A^{-1}, exprimer H_1,H_2,H_3 en fonction de e_1,e_2,e_3.

Exercice 19 (***)

E est de dimension n.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent non nul de E. Soit p son indice de nilpotence (le plus petit entier tel que $f^p = 0$).

1) Soit $x \notin \ker f^{p-1}$.
Montrer que $(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est libre.

2) En déduire que $f^n = 0$.

3) On suppose à présent que $n = p$.
Montrer que $(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est une base de E.

4) Donner la matrice de f dans cette base.