ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES - 2$^{\text{ÈME}}$ PARTIE

1 Équations du premier ordre

EXERCICE 1 (Exemples de cours)

1) $y'(t)+5y(t)=0$

2) $y'(t)+\dfrac{3}{t^2}y(t)=0$

3) $y'(t)+\dfrac{3}{t^2}y(t)=\dfrac{1}{t^2}$

4) $y'(t)+\dfrac{3}{t^2}y(t)=\mathrm{e}^{\frac{3}{t}}$

5) $y'(t)+\dfrac{3}{t^2}y(t)=\dfrac{1}{t^2}-5\,\mathrm{e}^{\frac{3}{t}}$

6) $t^2y'(t)+3y(t)=1$

7) $t^2y'(t)+3y(t)=-5t^2\,\mathrm{e}^{\frac{3}{t}}$

8) $t^3y'(t)=2y(t)+t^2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}$

EXERCICE 2 (Équations homogènes)

1) $y'(t)+2y(t)=0$

2) $y'(t)=\dfrac{2}{3}y(t)$

3) $4y'(t)-3y(t)=0$

4) $y'(t)+\dfrac{2}{t}y(t)=0$

5) $y'(t)+\dfrac{1}{1+t^2}y(t)=0$

6) $y'(t)=\dfrac{2}{1-t^2}y(t)$

EXERCICE 3 (Équations avec second membre)

1) $y'=x(y+2)$

2) $y'=-\tan(x)y+\dfrac{1}{\cos(x)}$ sur $I=\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

3) $y'=\tan(x)y+\dfrac{1}{\cos(x)}$ sur $I=\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

4) $y'-3y=\mathrm{e}^{3x}+2x\,\mathrm{e}^{x}$

5) $y'=y+x$ avec $y(0)=1$

6) $y'=(1+x)\,y$

7) $y'+2xy=x$ avec $y(0)=1$

8) $y'+2y=(x-2)^2$

9) $y'=\cos x+y$

10) $4y'+y=\cos(x)$ et $y(0)=0$

11) $y'-y=\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}$ et $y(0)=1$

EXERCICE 4 (Cas général)

1) $xy'-2y=x^2$

2) $(1+x^2)y'-2xy=0$

2 Équations du second ordre

EXERCICE 5

1) $y''+y'+y=\cos(2x)$

2) $y''+y=\cos(x)$

3) $y''+4y=\sin(2x)$

4) $y''+y'-2y=xe^{-2x}$

5) $y''-4y'+4y=(x^3+x)e^{2x}$

EXERCICE 6 Soit $\omega_0\geq 0$. Résoudre suivant les valeurs de ω :

$$y''+\omega_0^2y=\cos\omega t$$

3 Équations autonomes

EXERCICE 7 (Modèle de Maltus)

On note $N(t)$ la population au temps $t\geq 0$, $K>0$ et r deux constantes réelles. Le modèle de Maltus s'écrit

$$(E):\ \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=rN\left(1-\frac{N}{K}\right)$$

1) Montrer qu'il existe deux constantes $a,b\in\mathbb{R}^2$ telles que

$$\forall N\in\mathbb{R},\quad \frac{K}{N(K-N)}=\frac{a}{N}+\frac{b}{K-N}$$

2) Résoudre (E).

EXERCICE 8 (Modèle de Gompretz)

Avec les notations précédentes et en supposant $K>N(t)$ pour tout $t\geq 0$, on définit l'équations différentielle

$$(E):\ \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=rN\ln\left(\frac{K}{N}\right)$$

Résoudre (E).

4 Changements d'inconnue ou de variable

EXERCICE 9 (**)

Trouver les fonctions y, dérivables sur $]0,+\infty[$, ne s'annulant pas sur $]0,+\infty[$, vérifiant :

$$x^2y^2-xy'+y=0$$

Indication : on pourra poser: $z=\dfrac{1}{y}$

EXERCICE 10 (**)

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$(E)\qquad 4ty''+2y'-y=0$$

On pourra poser $u=\sqrt{t}$

EXERCICE 11 (* *)**

Trouver un changement de variable $x=g(t)$ qui transforme cette équation en équation différentielle linéaire à coefficients constants. Puis résoudre. (a est constant)

$$(1+x^2)^2y''+2x(1+x^2)y'+a^2y=0$$