Équations à une inconnue

Attention : Avant de diviser par un nombre, toujours vérifier qu'il est **non nul !**

Situation 1 : ordre 1

Exemple : $ax + b = cx + d$

On sait résoudre depuis la 4ème...
Il y a soit 0 solution, soit une, soit tous les nombres sont solution.

Situation 2 : Un produit égal à zéro

Un produit est nul si est seulement si un de ses facteurs est nul.

Exemple : $(5x+3)(2x+7)(3x^2-8) = 0$

Ici, on résout $5x+3=0$, $2x+7=0$ et $3x^2-8=0$
Le nombre de solutions dépend du nombre de facteurs et du nombre de solutions pour chaque facteur.

Situation 3 : Factorisable

Si x_1 est solution d'une équation polynomiale, alors on peut factoriser par $(x - x_1)$.
→ Commencer par chercher les solutions « évidentes ».

Exemple : $x^4 - 7x^3 + 12x^2 + 4x - 16 = 0$

-1 est racine évidente, on factorise donc par $(x+1)$.
$$(x+1)(x^3 - 8x^2 + 20x - 16)$$
2 est racine évidente du facteur de degré 3, on factorise par $(x-2)$
$$(x+1)(x-2)(x^2-6x+8)$$
Qui se factorise à nouveau :
$$(x+1)(x-2)^2(x-4)$$
Donc $\mathcal{S} = \{-1, 2, 4\}$

Penser aux identités remarquables :
$$\begin{cases} a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \\ a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \\ a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \end{cases}$$

Situation 4 : Un changement de variable

Exemple : $5(2x+1)^2 - 8 = 0$
Ici on pose $y = (2x+1)$ et on résout l'équation en fonction de y : $5y^2 - 8 = 0$
On trouve deux solutions y_1 et y_2
On en déduit les valeurs possible pour x en résolvant $2x+1 = y_1$ et $2x+1 = y_2$

C'est cette méthode qui est à la base des formules pour résoudre les équations de degré 2 avec la mise sous forme canonique.

Situation 5 : Équation du second degré.

Équation du type : $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$

S'il n'y a pas de racines évidentes, utiliser les formules du cours :
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Si $\Delta > 0$	Si $\Delta = 0$	Si $\Delta < 0$
Deux solutions dans **R**	Une solution double dans **R**	Aucune solution dans **R**
		Deux solutions dans **C**
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x = \dfrac{-b}{2a}$	$x_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2a}$ ou $x_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2a}$
		x_1, x_2 complexes conjuguées

Situation 6 : quotients, racines...

Exemple : $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$

On peut raisonner par analyse-synthèse.
Analyse : Si x est solution, alors $x(x-3) = 3x-5$
Donc $x^2 - 6x + 5 = 0$, donc $\mathcal{S} \subset \{1, 5\}$.
Synthèse : On vérifie que les racines sont dans le domaine de définition. Ici, seul $x = 5$ convient.
Donc $\mathcal{S} = \{5\}$

Situation 7 : Les autres situations...

C'est là que ça devient intéressant.
Ne pas hésiter à considérer la fonction « égale à 0 » et faire son étude.

Inéquations

Les inéquations se résolvent comme les équations...

MAIS
- Lorsque l'on multiplie ou divise par un nombre **négatif** on change le sens de l'inégalité.
  Par exemple, pour $-3x < 2$, si on divise par -3, cela donne $x > -\frac{2}{3}$
- Lorsque l'on compose par une **fonction décroissante**, on change le signe de l'inégalité.
- Lorsque l'on compose par une **fonction croissante**, on conserve le signe de l'inégalité.